

28.08.24

1.1.2 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : $AB, AC, AB+AC, B+C, A(B+C), A+B, (A+B)^2, A^2, B^2, A^2+2AB+B^2, C^2, C^3$ et C^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

On dit que C est triangulaire supérieure.

$C = (c_{ij})$ est triangulaire supérieure si $c_{ij} = 0, \forall i > j$

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1+1 \\ 1+1+1 \end{matrix}$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1+2 \\ 1+2+3 = 6 \end{matrix}$$

$$C^4 = C^3 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1+3 \\ 1+3+6 = 10 \\ 1+2+3+4 = 10 \end{matrix}$$

$$C^5 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1+4+10 = 15 \\ 1+2+3+4+5 = 15 \end{matrix}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \left\{ \quad C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

1.1.4 Soit A une matrice de type 3×7 , B une matrice de type 7×3 et C une matrice de type 7×7 . De quel type sont les matrices suivantes ?

a) $(A \cdot B) \cdot C$ ⚡

c) $C \cdot (B \cdot A)$

b) $B \cdot (A \cdot C)$ 7×7

d) $(A \cdot C) \cdot B$

a)

A	B	C
3×7	7×3	7×7

$$\begin{array}{ccc} A \cdot B & \rightarrow & 3 \times 3 \\ 3 \times 7 & 7 \times 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} AB \cdot C & & \\ 3 \times 3 & 7 \times 7 & \end{array}$$

b)

7×3	$(3 \times 7 \cdot 7 \times 7)$
7×3	3×7

1.1.7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B telle que $AB \neq 0$ et $BA = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1.1.3 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 telles que $AB = BA$.

Posons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a-c} & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a+b} & -a+b \\ c+d & -c+d \end{pmatrix}$$

Si $AB = BA$, on a
$$\begin{cases} a-c = a+b \\ a+c = c+d \\ b-d = -a+b \\ b+d = -c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = d \\ -a = -d \\ b = -c \end{cases}$$

Ainsi, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

B représente l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

1.1.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $(AB)(AB) = AB$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T$$

Soit T de type $n \times n$. Si $T^2 = T$, on dit que

T est idempotente.

1.1.10 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : $A \cdot B$, ${}^tA \cdot B$, ${}^t(A \cdot B)$, ${}^tB \cdot {}^tA$ et ${}^tB + {}^tA$.

Soit A une matrice $n \times n$.

Alors, si $A = (a_{ij})$ $1 \leq i, j \leq n$, on a ${}^tA = (b_{ij})$ $1 \leq i, j \leq n$

avec $b_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mercredi

1.1.10