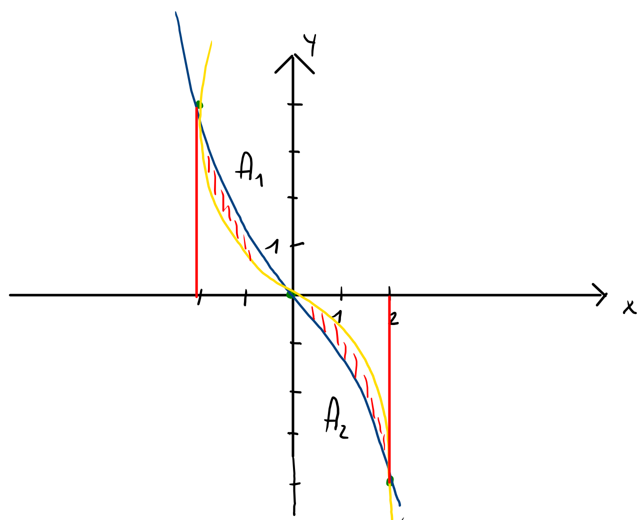
28.11.24

2.2.27 Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des fonctions f et g :

d) $f(x) = x(6-2x^2)$, $g(x) = x(2-x^2)$

Résoudre $f(x) = g(x)$.

$$x(6-2x^2) = x(2-x^2)$$
$$x(6-2x^2) - x(2-x^2) = 0$$
$$x(6-2x^2-2+x^2) = 0$$
$$x(4-x^2) = 0$$
$$x(2-x)(2+x) = 0$$
$$S = \{-2; 0; 2\}$$



Il y a 3 points d'intersections $A(-2;4)$, $B(0,0)$, $C(2;-4)$

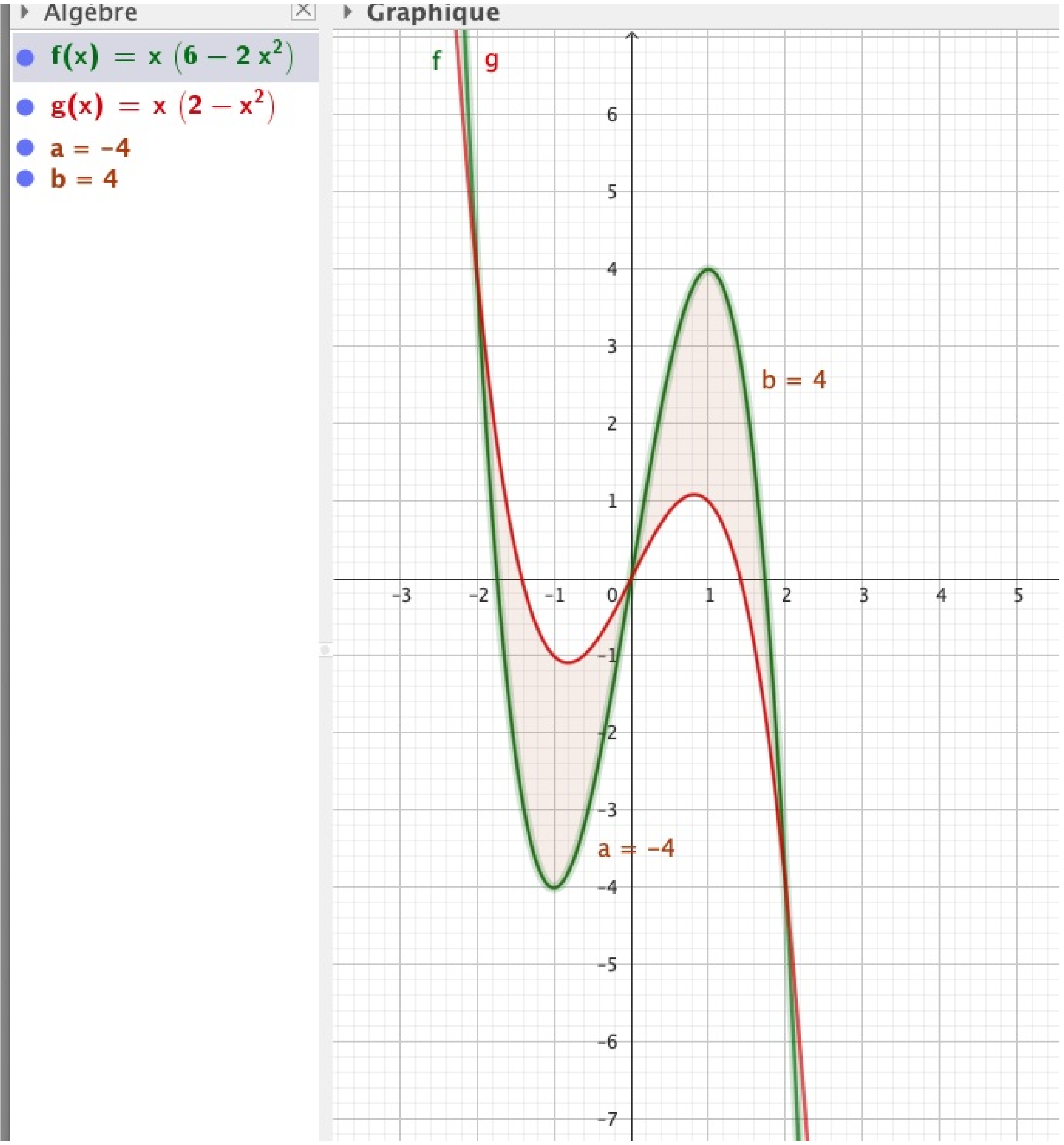
$g(-2) = -2(2-4) = 4$
$g(0) = 0$
$g(2) = 2(2-4) = -4$

$$\text{Aire} = A_1 + A_2$$
$$= \left|\int_{-2}^{0} f(x) - g(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} f(x) - g(x)\,dx\right|$$

$$A_1 = \left|\int_{-2}^{0} x(6-2x^2) - x(2-x^2)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{0} x(4-x^2)\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-2}^{0} 4x - x^3\,dx\right| = \left|\left. 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right|_{-2}^{0}\right| = \left|0-(8-4)\right| = 4$$

$$A_2 = 4$$

Finalement l'aire est égale à 8.



Aire : $|-4| + 4 = 8$

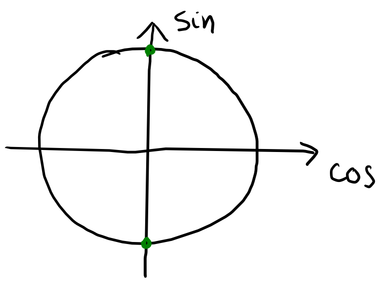
2.2.24 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$, et $x = b$:

c) $f(x) = \cos(3x)$, $\quad a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}$;

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C \quad . \quad \text{Posons } F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$$

Déterminons le signe de $f(x) = \cos(3x)$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$\cos(3x) = 0$



$$\cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

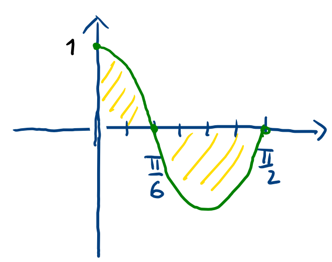
$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

Les zéros dans $[0; \frac{\pi}{2}]$: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi + 4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$k=0 \qquad k=1 \qquad \cancel{k=2}$

x		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$	
$\cos(3x)$			$+$	0	$-$	0	



$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

$$\text{Aire} = \left| \int_0^{\pi/6} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)\,dx \right| = \left| F(\tfrac{\pi}{6}) - F(0) \right| + \left| F(\tfrac{\pi}{2}) - F(\tfrac{\pi}{6}) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{3}\left(\sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0)\right) \right| + \left| \frac{1}{3}\left(\sin(\tfrac{3\pi}{2}) - \sin(\tfrac{3\pi}{6})\right) \right|$$

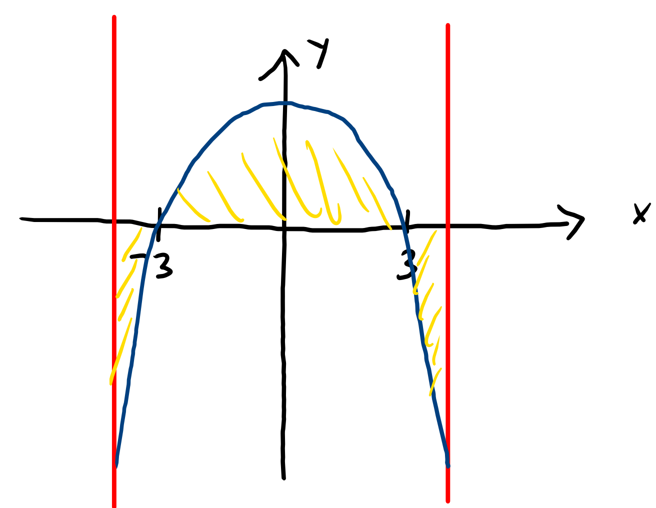
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

2.2.24 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$, et $x = b$:

a) $f(x) = 9 - x^2, \quad a = -4,\ b = 4\,;$

$f(x) = 9 - x^2$ sur $[-4; 4]$

x	-4		-3		3		4
$f(x)$	$\boxed{-7}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\boxed{-7}$



$$\int f(x)\,dx = \int 9 - x^2\,dx = 9x - \frac{x^3}{3} + c \quad ; \quad F(x) = \frac{-x^3 + 27x}{3}$$

$$\text{Aire} = \left| F(-3) - F(-4) \right| + \left| F(3) - F(-3) \right| + \left| F(4) - F(3) \right|$$

$$= \left| \frac{27 - 81}{3} - \frac{64 - 108}{3} \right| + \left| \frac{-27 + 81}{3} - \frac{27 - 81}{3} \right| + \left| \frac{-64 + 104}{3} - \frac{-27 + 81}{3} \right|$$

$$= \frac{128}{3}$$

à vérifier