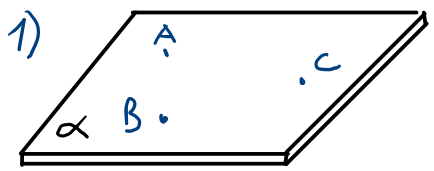
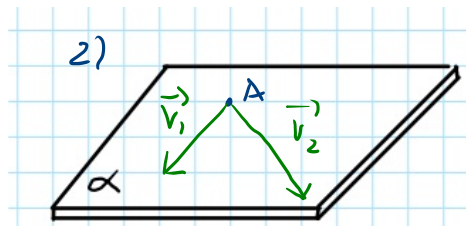
# Le plan dans l'espace

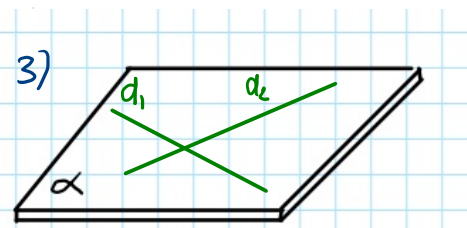
29.08.24

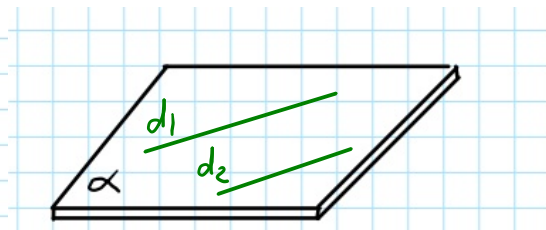
On peut donner un plan par :

1) trois points non alignés
2) un point et deux vecteurs directeurs
3) deux droites sécantes
4) deux droites parallèles




De 2) : $A(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

Une équation paramétrique vectorielle de $\alpha$ :

$$(\alpha) : \quad \vec{OP} = \vec{OA} + k\vec{v_1} + t\vec{v_2}$$

$$(\alpha) : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer une équation cartésienne de $\alpha$, on écrit l'équation ci-dessus comme un système et on élimine les paramètres $k$ et $t$.

**3.5.2** Déterminer une équation paramétrique du plan $\alpha$ :

a) qui passe par $A(1;-2;3)$ et a pour vecteurs directeurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ , $k, t \in \mathbb{R}$

b) qui passe par les points $A(2;5;1)$, $B(-1;7;0)$ et qui est parallèle au vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) qui passe par $A(1;-2;3)$, $B(5;2;1)$ et $C(2;5;2)$,

d) qui passe par $A(5;2;-2)$ et est parallèle au plan $Oxy$,

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ // $\vec{u}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , $k, t \in \mathbb{R}$

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ , $k, t \in \mathbb{R}$

d)




$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2}$

**3.5.3** Montrer que les équations suivantes définissent toutes le même plan :

① $\begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases}$ , avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ② $3x + 3z = 39 - 6y$

③ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(α): $3x + 6y + 3z - 39 = 0 \quad | \div 3$

②: (α): $x + 2y + z - 13 = 0$

① $\begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \lambda \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 - \mu \\ y + z = 6 + \mu \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix}$

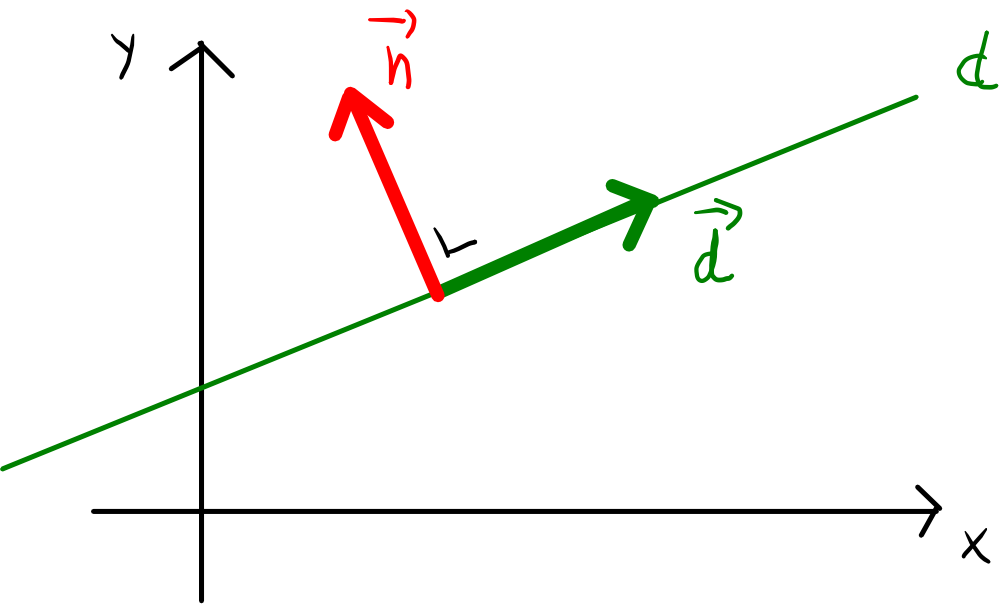
$\Leftrightarrow \quad x + 2y + z - 13 = 0$

③ $\begin{cases} x = 0 + \alpha \\ y = 0 + \beta \\ z = 13 - \alpha - 2\beta \end{cases} \begin{matrix} \alpha \\ \cdot 1 \\ \\ \cdot 1 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 13 - 2\beta \\ y = \beta \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \quad x + 2y + z - 13 = 0$

# Vecteur normal à une droite dans le plan (rappel)




$(d)$ : $ax + by + c = 0$ , $a, b$ non nuls

vecteur directeur : $\vec{d} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

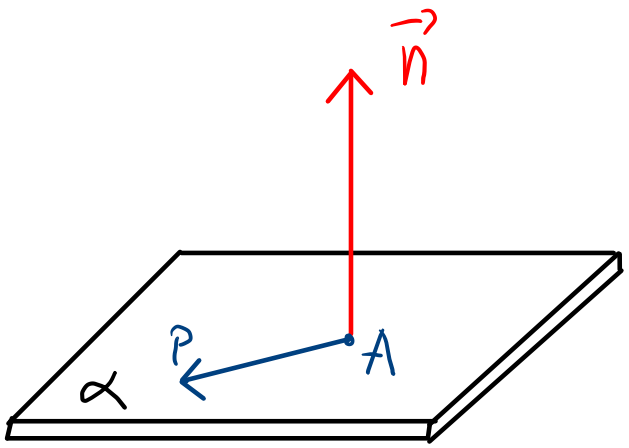
vecteur normal : $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$(d)$ : $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ , pente $m = \frac{-a}{b}$

Exemple : $5x - 3y + 88 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

# Vecteur normal à un plan dans l'espace




$$(\alpha): \quad ax + by + cz + d = 0$$

$P(x, y, z) \in \alpha$

$A(a_1, a_2, a_3) \in \alpha$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3)$$

$$= ax + by + cz + (-aa_1 - ba_2 - ca_3)$$

$$= ax + by + cz - \underbrace{(aa_1 + ba_2 + ca_3)}_{(-d)}$$

$$= ax + by + cz - (-d) = 0$$

Donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \alpha$

**3.5.4** Calculer les composantes d'un vecteur normal à chacun des plans suivants :

a) $2x - y - 2z + 5 = 0$

b) $x + 5y - z = 0$

c) $3x - 2y - 7 = 0$

d) $5y - 3z = 0$

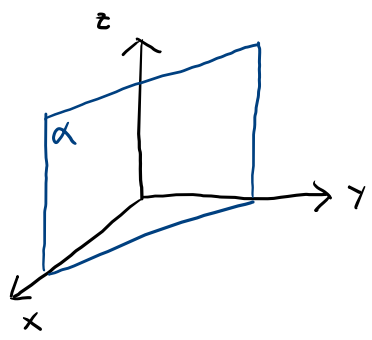
e) $x + 2 = 0$

f) $3y + 5 = 0$

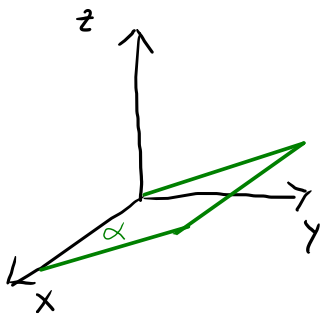
a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $(\alpha) : 3x - 2y - 7 = 0$ , $\alpha \,/\!/\, Oz$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$




d) $(\alpha) : 5y - 3z = 0$ , $\alpha \,/\!/\, \vec{e}_1$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$




e) $x + 2 = 0$ , $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $3y + 5 = 0$ , $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**3.5.5** Déterminer l'équation cartésienne du plan $\alpha$ :

a) qui passe par $P(2;1;-1)$ et est normal au vecteur $(1;-2;3)$ ; $= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) qui passe par $P(-6;10;16)$ et est perpendiculaire à la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$ ;

c) qui passe par l'origine et est perpendiculaire au segment $AB$, avec

$$A(1;0;5) \quad \text{et} \quad B(3;-3;8);$$

d) qui passe par $P(1;-2;4)$ et est parallèle au plan d'équation $5x + 2y - z + 5 = 0$.

a) $(\alpha) : \quad x - 2y + 3z + d = 0$

$\alpha \ni P : \quad 2 - 2 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \quad : \quad (\alpha) : x - 2y + 3z + 3 = 0$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$(\alpha) : \quad 2x - y - 2z + d = 0$

$\alpha \ni P : \quad -12 - 10 - 32 + d = 0 \Rightarrow d = 54 : \quad (\alpha) : 2x - y - 2z + 54 = 0$

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\alpha) : \quad 2x - 3y + 3z = 0$

d) $(\alpha) : \quad 5x + 2y - z + d = 0$

$\alpha \ni P : \quad 5 - 4 - 4 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \quad (\alpha) : 5x + 2y - z + 3 = 0$

Mardi → 3.5.8