Pour jeudi

29.10.24

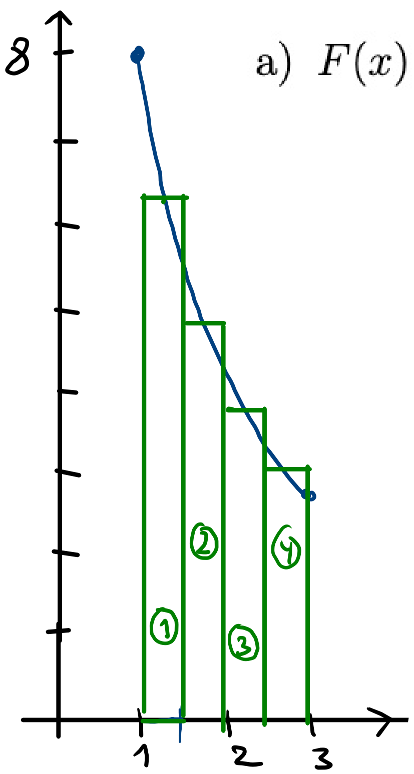
2.1.5 En utilisant une somme de Riemann pour laquelle l'intervalle considéré est divisé en quatre sous-intervalles et où l'on considère le point milieu de chacun de ces sous-intervalles, trouver une valeur approximative de

$$\int_1^3 \frac{8}{x}\,dx$$

2.2.1 Pour chacune des questions ci-dessous, montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$:

a) $F(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^7}}$ et $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^9}}$;

$= 8 \cdot \frac{1}{x}$



$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{1} + \mathcal{A}_{2} + \mathcal{A}_{3} + \mathcal{A}_{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1+1.5}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1.5+2}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{2+2.5}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{2.5+3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f(1{,}25) + f(1{,}75) + f(2{,}25) + f(2{,}75)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7} + \frac{4}{9} + \frac{4}{11}\right) = 16\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)$$

$$\cong 8{,}7$$

2.2.1 Pour chacune des questions ci-dessous, montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$:

a) $F(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^7}}$ et $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^9}}$;

$$\boxed{\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}}$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \iff \boxed{F'(x) = f(x)}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{x^7}}\right)' = \left(-2 \cdot x^{-\frac{7}{2}}\right)' = -2\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)'$$

$$= -2 \cdot \frac{-7}{2} \cdot x^{-\frac{7}{2}-1} = \underbrace{-2 \cdot \frac{-7}{2}}_{} \cdot x^{-\frac{9}{2}}$$

$$7 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^9}} = \frac{7}{\sqrt{x^9}} = f(x)$$

c) $F(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} - 11$ et $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}$;

$$F'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x+1} - \cancel{2}x\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{2\sqrt{x+1} - \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{2(x+1) - x}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = 2x & ;\ u' = 2 \\ v = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} & ;\ v' = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{array}}$$

CRM

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

$$= \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}$$

2.2.2 Vérifier les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2x}+\frac{x^2}{4}+c$, avec $c \in \mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int \left(4x^2-\frac{7}{3}-\frac{14}{3x^3}\right) dx = \frac{4x^5-7x^3+7}{3x^2}+c$, avec $c \in \mathbb{R}$;

$$\boxed{\begin{gathered}\int f(x)\,dx = F(x)\\ \Updownarrow\\ f(x) = F'(x)\end{gathered}}$$

a) $F(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x^2}{4} + c$

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2x} + \frac{x^2}{4} + c\right)' = \frac{-1}{2x^2} + \frac{x}{2} = f(x)$$

b) $$F'(x) = \left(\frac{4x^5-7x^3+7}{3x^2} + c\right)' = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{3}x + \frac{7}{3}x^{-2}\right)' =$$

$$= 4x^2 - \frac{7}{3} + \frac{7}{3}\cdot(-2)\cdot x^{-3} = 4x^2 - \frac{7}{3} - \frac{14}{3x^3} = f(x)$$

Théorème

Si f admet une primitive F dans un intervalle $[a,b]$,

alors toutes les primitives de f sont données par $F + C$, où $C \in \mathbb{R}$

Démonstration

Soit F_1 et F_2 deux primitives de f.

Montrons que $F_1 = F_2 + C$.

Calculons $(F_1 - F_2)'$:

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Donc $(F_1 - F_2)(x) = C$, où $C \in \mathbb{R}$. Donc $F_1(x) - F_2(x) = C$, où $C \in \mathbb{R}$

$\boxtimes$

2.2.4 Calculer :

a) $\int \frac{dx}{x^2}$

b) $\int \frac{2dx}{x^3}$

c) $\int \frac{-7dx}{x^5}$

d) $\int \sqrt{x}\,dx$

e) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

h) $\int \left(\frac{3}{x^4} - \sqrt[4]{x^3}\right) dx$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \neq -1}$$

a) $\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$

c) $\int -7\,x^{-5}\,dx = -7 \int x^{-5}\,dx = -7 \cdot \left(\frac{1}{-4} x^{-4}\right) + c = \frac{7}{4} x^{-4} + c = \frac{7}{4x^4} + c$

g) $\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} x^{-\frac{2}{3}+1} + c = 3 \cdot x^{\frac{1}{3}} + c = \frac{-3}{\sqrt[3]{x}} + c$

2.2.5 Calculer :

a) $\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$

Candidat : $K\sin(3x)$, $K \in \mathbb{R}$

$(K \cdot \sin(3x))' = \cos(3x)$

$\parallel$

$K \cdot \cos(3x) \cdot \underbrace{(3x)'}_{\text{dérivée interne}} = K \cdot \cos(3x) \cdot 3 \Rightarrow 3K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{3}$