30.10.24

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

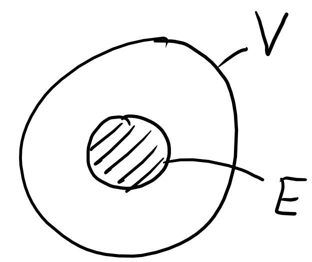
2) $B = \{(x;y;z) | z = 0\}$

4) $D = \{(x;y;z) | 2x + y + z = 21\}$

$E \subset V$ est un sous-espace vectoriel si $E \neq \emptyset$

$\forall\, u, v \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda u + \mu v \in E$$



ou avec deux conditions : ① $\lambda u \in E$

② $u + v \in E$

2) $u = (x, y, 0)$, $v = (a, b, 0)$

$$\left.\begin{array}{ll} ② & u + v = (x+a, y+b, 0) \in B \\ ① & \lambda u = (\lambda x, \lambda y, 0) \in B \end{array}\right\}\ B \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3$$

4) $(x, y, z) : 2x + y + z = 21$

$d = (0, 21, 0) \in D$

$2 \cdot d = (0, 42, 0) \notin D$

$(0, 0, 0) \notin D$, donc D n'est pas un sev !

$$F = \{(x; y; z) | xy = z\}$$

$$H = \left\{(x; y; z) | x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\right\}$$

$f = (2, 3, 6) \in F$

$-2f = (-4, -6; -12) \notin F$

$24 \neq -12$

$h_1 = (x, y, z) \qquad x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

$h_2 = (a, b, c) \qquad a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$

- $\lambda h_1 \in H$: $\quad (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ on a $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \iff \lambda x = \lambda \frac{y}{2} = \lambda \frac{z}{3}$

- $h_1 + h_2 \in H$: $\quad (x+a, y+b, z+c)$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \\ a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \end{cases} \Rightarrow x + a = \frac{y+b}{2} = \frac{z+c}{3}$$

1.2.7 Soit $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_\mathbb{R}$.

a) $P = \{ f \in \mathcal{F}_\mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \}$

$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 - 1} \quad \in \mathbb{R}$

Démontrons que $P \subset \mathcal{F}_\mathbb{R}$ est un sev de $\mathcal{F}_\mathbb{R}$.

Soit $f, g \in P$. On a $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = g(x)$

1) $(f+g)(x)$ est paire.

En effet $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $(\lambda f)(x)$ est paire.

En effet $(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$

b) $I = \{ g \in \mathcal{F}_\mathbb{R} \mid g(-x) = -g(x) \}$ est un sev de $\mathcal{F}_\mathbb{R}$

Soit $f \in \mathcal{F}_\mathbb{R}$, alors f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. En effet :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}$$

$p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad p(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$

$i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad i(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x)$

$\boxed{\mathcal{F}_\mathbb{R} = P \oplus I}$ somme directe

1.2.8 - 1.2.10 - 1.2.12

1.2.8 a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$? oui

b) $B = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$? oui

c) $C = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p) = 2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[t]$? NON

b) $f, g \in B$, $f(0) = f(1)$ et $g(0) = g(1)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(0) = f(1) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f(0) = \lambda f(1) \Rightarrow \lambda f \in B$

$f(0) = f(1)$ et $g(0) = g(1) \Rightarrow \underbrace{f(0) + g(0)}_{(f+g)(0)} = f(1) + g(1)$

$(f+g)(0) = (f+g)(1) \Rightarrow f+g \in B$

c) $x^2, \quad 3x^2 + 3x + 3, \quad -x^2 + 8 \in C$

$x^2 + (-x^2) = 0 \notin C$

$C = \{ p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p) \leq 2 \}$ est un sev

1.2.10 Montrer que l'ensemble $A = \{(x; y; z; t) | x = 2y + z \text{ et } t = 5x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- $(2y+z,\ y,\ z,\ 10y+5z)$
- $(x, y, z, t) \in A \qquad \begin{cases} x = 2y+z \\ t = 5x \end{cases}$

$(a, b, c, d) \in A \qquad \begin{cases} a = 2b+c \\ d = 5a \end{cases}$

$$\underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(x, y, z, t)}_{\in A} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$$

comme $x = 2y + z$ alors $\lambda x = \lambda(2y+z) = 2\lambda y + \lambda z$

comme $t = 5x$ alors $\lambda t = \lambda 5x = \lambda t = 5 \lambda x$

$$(x, y, z, t) + (a, b, c, d) = (x+a,\ y+b,\ z+c,\ t+d) \in A$$

$x + a = (2y+z) + (2b+c) = 2(y+b) + z + c$

$t + d = 5x + 5a = 5(x+a)$

Famille libre

La famille de vecteurs $(V_1, V_2, ---, V_n)$ d'un espace vectoriel E est une famille libre si toute combinaison linéaire égale au vecteur nul

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

Exemples

1) $\mathcal{F}_1 = \big((1,2), (2,4) \big)$ est liée

$$\underbrace{-1}_{= \lambda_1} (1,2) + \underbrace{0.5}_{= \lambda_2} (2,4) = (0,0)$$

2) $\mathcal{F}_2 = \big((1,0), (0,1) \big)$ est libre

$$0 (1,0) + 0 (0,1) = (0,0)$$

1.2.10 Montrer que l'ensemble $A = \{(x; y; z; t) | x = 2y + z \text{ et } t = 5x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.