

Exercices supplémentaires sur les séries

Ex1

$$1) u_k = 80 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} 80 \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 80 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k}_{\text{série géométrique}} = 80 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= 80 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 320$$

$$2) \quad \begin{array}{ccc} T_1 = 80, & T_2 = 80 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2, & T_3 = 80 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\ \text{A}_1, \text{A}_2 & \text{A}_3, \text{A}_4 & \text{A}_5, \text{A}_6 \end{array}$$

$$T_1 = 80, \quad T_2 = 80 - 80 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$T_2 = 80 - 80 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 80 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

$$T_3 = 80 - 80 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 80 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 80 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4\right)$$

$$\text{donc } W_k = (-1)^{k+1} \cdot 80 \left(\frac{3}{4}\right)^{2k-2} = (-1)^{k+1} \cdot 80 \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{k-1}$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot 80 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{k-1}$$

$$= (-1)^2 \cdot (-1)^{k-1} \cdot 80 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{k-1} = 80 \cdot \left(\frac{-9}{16}\right)^{k-1}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n 80 \cdot \left(\frac{-9}{16}\right)^{k-1} = 80 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-9}{16}\right)^k \quad \text{c'est une série géométrique}$$

$$\Rightarrow T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 80 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-9}{16}\right)} = 80 \cdot \frac{1}{\frac{25}{16}} = 80 \cdot \frac{16}{25} = \frac{256}{5}$$

$$= 51.2$$

Ex 2

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(1-x)^k}{2^{k+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad x = -\frac{1}{2}, \quad u_k = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^k}{2^{k+1}} = \frac{3^k}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{3^k}{2^{2k+1}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

série géométrique convergente : $r = \frac{3}{4} < 1$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - 3/4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{1} = \frac{3}{2}$$

$$b) \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(1-x)^k}{2^{k+1}} = \frac{1-x}{2^2} + \frac{(1-x)^2}{2^3} + \dots + \frac{(1-x)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1-x}{2^2} \left(1 + \frac{1-x}{2} + \dots + \frac{(1-x)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$$

c'est une série géométrique de raison $r = \frac{1-x}{2}$.

cette série converge si $|r| < 1 \Leftrightarrow -1 < r < 1$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{1-x}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < 1-x < 2 \Leftrightarrow 2 > x-1 > -2$$

$$\Leftrightarrow 3 > x > -1 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

cette série est convergente si $x \in]-1; 3[$

Dans ce cas, elle converge vers

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1-x}{2}} &= \frac{1-x}{4} \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{2}} = \frac{1-x}{4} \cdot \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \end{aligned}$$

Ex 3

$$1) \quad 0 < u_n = \frac{2^n - 1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n = v_n$$

La série géométrique de terme v_n converge, alors par le 1^{er} critère de comparaison, la série de terme positif u_n converge également.

$$2) \quad u_n = \frac{3^n}{(n+1)!} \quad . \quad \text{On a } u_n > 0, n \geq 1$$

Utilisons le critère du quotient:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n+2} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

Donc la série de terme positif u_n est convergente

$$3) \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n$$

Utilisons le critère d'équivalence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+3} = 1 \quad \begin{array}{l} \nearrow \neq 0 \\ \searrow \neq +\infty \end{array}$$

Ces deux séries sont équivalentes.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ est une série de

Riemann divergente ($\alpha = \frac{1}{2}$), donc la série de terme

u_n est aussi divergente.

Ex 4

Série alternée : $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2+1}$. Posons $u_k = \frac{k}{k^2+1}$

1) • La suite converge vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n(n+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$$

$$\bullet \quad u_{k+1} - u_k = \frac{k+1}{k^2+2k+2} - \frac{k}{k^2+1} = \frac{k^3+k^2+k+1 - k^3-2k^2-2k}{(k^2+2k+2)(k^2+1)}$$

$$= \frac{-k^2 - k + 1}{(k^2+2k+2)(k^2+1)} < 0, \quad k \geq 1$$

Par le critère de Leibniz, cette série alternée est

convergente.

2) Regardons la convergence absolue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n} = v_n$$

Utilisons le critère d'équivalence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n^2})} = 1 \begin{matrix} \nearrow \neq 0 \\ \searrow \neq +\infty \end{matrix}$$

Donc les deux séries sont équivalentes.

Comme la série de terme $v_n = \frac{1}{n}$ diverge, c'est la série harmonique, alors la série de terme v_n ne converge pas. Donc la série n'est pas absolument convergente. Elle est semi-convergente.

Ex 5

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$1) u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

2) Etudions la convergence avec le critère d'Alembert:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \cancel{(k+1)} \cancel{(k+2)}}{\cancel{(k+1)} \cancel{(k+2)} (k+3)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+3} = 1$$

On ne peut pas conclure.

$$3) \quad u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k^3} = v_k$$

$$u_k - v_k = \frac{k^2 - (k+1)(k+2)}{k^3(k+1)(k+2)} = \frac{-3k-2}{k^3(k+1)(k+2)} \leq 0$$

$$\text{Donc } u_k \leq v_k, \quad k \geq 1.$$

La série de terme $v_k = \frac{1}{k^3}$ est une série de Riemann convergente ($d=3>1$), donc par le 1^{er} critère de comparaison, la série de terme positif u_k est convergente.