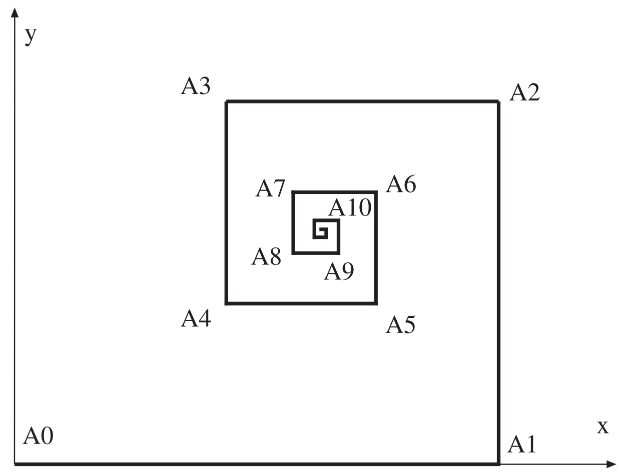
Sujet 1 sur les séries : exercices supplémentaires

Exercice 1

On considère le chemin en forme de spirale fabriquée de la manière suivante : on part de l'origine d'un repère orthonormé et l'on construit la spirale en traçant une suite de segments, le segment suivant étant perpendiculaire au précédent et de longueur égale aux 3/4 de la longueur de celui-ci. Soit $A_0(0;0)$ et $A_1(80;0)$ les deux premiers sommets du chemin ainsi parcouru et $A_2, A_3, A_4, \ldots$ les sommets suivants (voir ci-dessous).



1) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ la longueur de la spirale reliant A_0 à A_n, u_k étant la longueur du segment $A_{k-1}A_k$. Expliciter la suite (u_k) et la série S_n.

   Calculer $S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ en justifiant la convergence.

2) Soit T_n l'abscisse commune des sommets A_{2n-1} et A_{2n} $(n \geq 1)$. Il existe une suite w_k telle que $T_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. Expliciter w_k et T_n.

   Calculer $T = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k$ l'abscisse du point limite de la spirale en justifiant la convergence.

Exercice 2

Soit la série $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-x)^k}{2^{k+1}}$, où x est un paramètre réel.

1) Prouver que S_n converge si $x = -\frac{1}{2}$ et calculer la valeur limite S

2) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série S_n converge. Pour ces valeurs de x, donner la limite en fonction de x.

Exercice 3

Les séries $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ dont le terme u_k est donné ci-dessous sont-elles convergentes ? (justifier et préciser le critère utilisé).

1) $u_k = \dfrac{2^k - 1}{3^k}$ 2) $u_k = \dfrac{3^k}{(k+1)!}$ 3) $u_k = \dfrac{\sqrt{k}}{k+3}$

Exercice 4

Soit la série alternée $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \dfrac{k}{k^2+1}$.

1) Prouver qu'elle est convergente en utilisant le critère de Leibniz.

2) La série est-elle absolument convergente ? semi-convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 5

On considère la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$.

1) Quel est le terme u_k de la série ?

2) Le critère de d'Alembert permet-il de déterminer si la série est convergente ? Justifier.

3) Prouver la convergence de cette série à l'aide du critère de comparaison.

Réponses

Exercice 1

1) $u_k = 80 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$; $S_n = 320\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$; $S = 320$;

2) $w_k = 80 \cdot \left(-\frac{9}{16}\right)^{k-1}$; $T_n = 51.2 \cdot \left(1 - \left(-\frac{9}{16}\right)^n\right)$; $T = 51.2$

Exercice 2

1) $S = \frac{3}{2}$ 2) Convergence vers $\frac{1-x}{2x+2}$ si $x \in]-1;3[$

Exercice 3

1) converge 2) converge 3) diverge

Exercice 4

2) non absolument convergente ; semi-convergente.

Exercice 5

1) $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ 2) Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure