

# 11. Étudier la convergence des séries

a)  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{k-1} + \dots$

b)  $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \dots$

a)  $u_k = (-1)^{k-1}$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{k-1} \neq 0$  : critère de divergence

$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}$  diverge, c'est une série géométrique de raison  $r = -1$

b)  $u_k = \frac{1}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \leq \left(\frac{2}{5}\right)^k$  pour  $k \geq 1$

La série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k$  converge.

On a la série géométrique  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$

Donc par le 1<sup>er</sup> critère de comparaison  $\sum_k u_k$  converge.

c)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{k+1}{2k+1} + \dots$

$u_k = \frac{k+1}{2k+1}$ . Comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \frac{1}{2} \neq 0$ , la série diverge.

d)  $\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt[3]{10}} + \frac{1}{\sqrt[4]{10}} - \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt[k+1]{10}} + \dots$

$u_k = (-1)^{k+1} 10^{-\frac{1}{k+1}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 10^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^{\frac{1}{x}}} = 1 \neq 0. \text{ Donc la}$$

série diverge.

$$e) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2k} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \dots \right)$$

$$U_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}$$

la série harmonique diverge

$$f) \quad \frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{10k+1} + \dots$$

$$U_k = \frac{1}{10k+1} \geq \frac{1}{10k+10} = \frac{1}{10(k+1)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10k+1} \geq \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \text{ série qui diverge}$$

Par le 2<sup>ème</sup> critère de comparaison,  $\sum_k U_k$  diverge

$$g) \quad \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k \cdot (k+1)}} + \dots$$

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \sim \frac{1}{k}. \text{ Posons } V_k = \frac{1}{k}$$

Utilisons le critère d'équivalence pour deux séries à termes positifs :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{U_k}{V_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{k(k+1)}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2(1 + \frac{1}{k})}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k \sqrt{1 + \frac{1}{k}}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}} = 1 \quad \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array}$$

Comme la série de terme  $V_k$  diverge, c'est la série harmonique, par le critère d'équivalence  $\sum_k u_k$  diverge.