15. Étudier la convergence des séries à termes positifs

d) $\dfrac{k^2}{2k^2+1}$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k^2}{2k^2+1} = \dfrac{1}{2}$, le terme de la série $\dfrac{k^2}{2k^2+1}$ ne converge pas vers 0, donc la série ne converge pas.

e) $\dfrac{k}{k^2+1} \sim \dfrac{1}{k}$. La série harmonique diverge.

On essaie:

$$\frac{k}{k^2+1} - \frac{1}{k+1} = \frac{k^2+k-k^2-1}{(k^2+1)(k+1)} = \frac{k-1}{(k^2+1)(k+1)} \geq 0 \quad \text{pour } k \geq 1$$

Comme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k+1}$ diverge, alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k}{k^2+1}$ diverge par le critère de comparaison.

Deuxième méthode : le critère d'équivalence.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{k^2+1} = 1$$

$\neq 0$

$\neq +\infty$

Donc, par le critère d'équivalence, la série diverge.

f) $\dfrac{2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2} \sim \dfrac{2}{k^3}$ qui converge (série de Riemann)

On essaie :

$$\frac{2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2} - \frac{2}{k^3} = \frac{2k^4+k^3-2(k+1)^2(k+2)^2}{k^3(k+1)^2(k+2)^2}$$

$$= \frac{2k^4+k^3-2k^4-12k^3-26k^2-24k-8}{k^3(k+1)^2(k+2)^2}$$

	k^2	$2k$	1
k^2	k^4	$2k^3$	k^2
$4k$	$4k^3$	$8k^2$	$4k$
4	$4k^2$	$8k$	4

$$= \frac{-11k^3-26k^2-24k-8}{k^3(k+1)^2(k+2)^2} < 0 \text{ pour } k \geq 1$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$ est convergente, alors cette série est aussi convergente.

Deuxième méthode : le critère d'équivalence.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}}{\dfrac{2}{k^3}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^3(2k+1)}{2(k+1)^2(k+1)^2} =$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{2k^4+\dots}{2k^4+\dots} = 1$$

$\neq 0$

$\neq +\infty$

Par le critère d'équivalence, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}$ converge.