16. Étudier la convergence des séries alternées suivantes. Dans le cas de convergence, dire si les séries sont absolument convergentes ou semi-convergentes.

b) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} + \ldots$

Posons $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$. On a

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}} < 0$$

Donc la suite (u_k) est décroissante.

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$, la série est convergente (critère de Leibniz).

Etudions sa convergence absolue.

$$\left| \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \right| = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

La serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ est une série de Riemann divergente.

La série n'est pas absolument convergente.

Donc, la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ est semi-convergente.

c) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \ldots$

Posons $u_k = \frac{1}{k^2}$

$$U_{k+1} - U_k = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-(k+1)^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{-2k-1}{k^2(k+1)^2} < 0, k \geq 1$$

ce qui montre que (U_k) est décroissante.

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k^2} = 0$, le critère de Leibniz montre que la série est convergente.

De plus, la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série est absolument convergente.

d) $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}k}{6k-5} + \ldots$

Posons $U_k = \frac{k}{6k-5}$.

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{k}{6k-5} = \frac{1}{6} \neq 0$, par le critère de Leibniz, cette série n'est pas convergente.

Elle n'est pas absolument convergente pour la même raison.