Ex 20

a) $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots$; $a_k = 1$

c'est une série géométrique qui converge pour $|x| < 1$

- Si $x = 1$, la série diverge.
- Si $x = -1$, la série diverge.

Le domaine de convergence $D =]-1; 1[$

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k$; $a_k = \frac{1}{k}$.

Par la formule d'Alembert : $r = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{1/k}{1/_{k+1}}$

$= 1$

La série converge pour $|x| < 1$

- Si $x = 1$, c'est la série harmonique qui diverge.
- Si $x = -1$, c'est la série harmonique alternée qui converge.

Donc $D = [-1; 1[$

c) $\sum_{k=0}^{+\infty} k^3 x^k$. $a_k = k^3$

Par la formule d'Alembert, le rayon de convergence est

$$r = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^3}{k^3 + 3k^2 + 3k + 1} = 1$$

Donc la série converge si $|x| < 1$

• Si $x = 1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k^3$ diverge car la suite $u_k = k^3$ ne converge pas vers 0.

• Si $x = -1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k^3(-1)^3$ diverge car la limite $\lim_{k \to +\infty} k^3(-1)^3$ n'existe pas (donc $\neq 0$).

Donc $D =]-1; 1[$

d) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} x^k$, $a_k = \frac{1}{k \cdot 2^k}$

Avec la formule d'Alembert : $\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{k \cdot 2^k}$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{2 \cdot (k+1)}{k} = 2$$

Donc la série est convergente pour $|x| < 2$

• Si $x = 2$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$, c'est la série harmonique qui diverge.

• Si $x = -2$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} (-2)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} (-1)^k$, c'est la série harmonique alternée qui converge.

Donc $D = [-2; 2[$

e) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} x^k$, $a_k = \frac{1}{k^k}$.

Avec la formule de Cauchy-Hadamard:

$$r = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{k^k}}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to +\infty} k = +\infty$$

Donc $D = \mathbb{R}$

g) $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$, $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$

Avec la formule d'Alembert :

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{1/\sqrt{k}}{1/\sqrt{k+1}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = 1$$

Donc la série est convergente si $|x| < 1$.

• Si $x = 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. C'est une série alternée.

Posons $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ et utilisons le critère de Leibniz (page 15)

(i) $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$

(ii) $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} < 0$, la suite (u_k) est décroissante. Donc cette série est convergente

• Si $x = -1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{\sqrt{k}} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

c'est une série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, donc divergente.

Ainsi $D =]-1 ; 1]$

h) $\sum_{k=0}^{+\infty} k! \, x^k$, $a_k = k!$

Par la formule d'Alembert :

$$r = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

Donc $D = \{0\}$

m) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1) \cdot 2^k} \cdot (x-2)^k$, $a_k = \frac{1}{(2k-1) \cdot 2^k}$

Par la formule d'Alembert :

$$r = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{(2(k+1)-1) \; 2^{k+1}}{(2k-1) \; 2^k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(2k+1)}{(2k-1)} \cdot 2$$

$= 2$

Donc la série est convergente si $|x-2| < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

- Si $x = 0$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1) \cdot 2^k} (-2)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$

c'est une série alternée. Posons $u_k = \frac{1}{2k-1}$, la suite est décroissante et converge vers 0.

Par le critère de Leibniz, elle est convergente.

• Si $x=4$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)\cdot 2^k} \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$.

Cette série est divergente, car elle est équivalente à la série harmonique :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1/_{2k-1}}{1/_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Ainsi $D = [0 ; 4[$