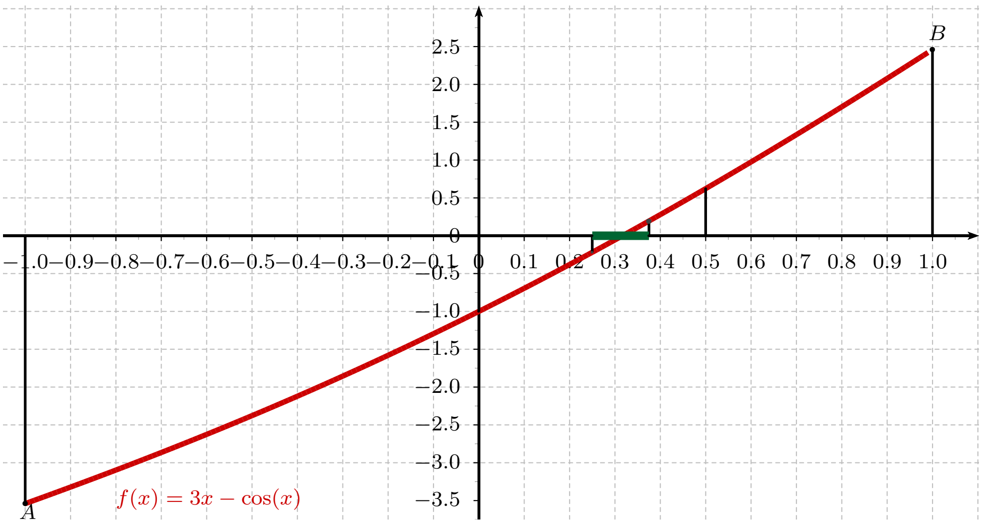
Calcul numérique– Résolution d'équations

1 Méthode de la bissection

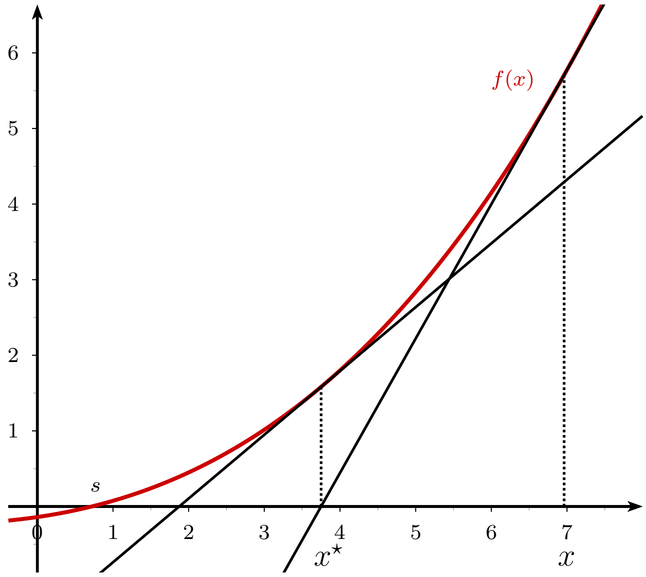
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe au moins un $x^\star \in [a, b]$ tel que $f(x^\star) = 0$.
Si de plus, si f est strictement monotone dans $[a, b]$, alors cette racine, $x^\star$, est unique.
La méthode de la bissection consiste à construire une suite d'intervalles emboîtés qui contiennent un zéro de f.



Ci-dessus, une illustration avec l'exercice 4.2.4 d) : $f(x) = 3\,x - \cos(x)$.
Sur $[-1, 1]$, f est monotone (strictement croissante) et $f(-1) \cdot f(1) < 0$.
On arrive dans l'intervalle $[0,25\,;\,0,375]$ et on continue jusqu'à la précision voulue.
Ici, on a $x^\star = \frac{0,25+0,375}{2} = 0,3125$.
$f(x^\star) = f(0,3125) = 3 \cdot 0,3125 - \cos(0,3125) = -0,01406794804817224$.

2 Méthode de la tangente

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.



Si la fonction f est dérivable et si $f'(x)$ est non nul, alors la tangente au graphe de f coupe l'axe des abscisses au point $(x^\star\,,\,0)$.
On calcule $x^\star$ par la formule : $x^\star = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$
On répète le procédé à partir d'une estimation initiale x_0, et on définit la suite des valeurs

$$x_1 = x_0^\star \;,\; x_2 = x_1^\star \;,\; x_3 = x_2^\star \;,\; \ldots \;,\; x_{n+1} = x_n^\star$$

et plus simplement $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ devrait converger vers le zéro s de la fonction.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

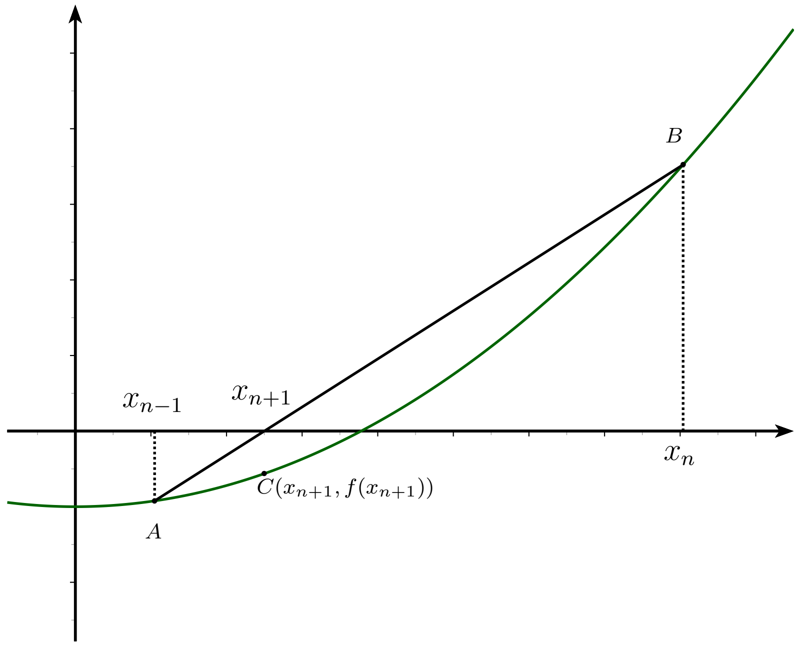
- f est deux fois continûment dérivable dans $I = [a, b]$
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés
- f' de signe constant (non nul) dans I
- f'' de signe constant dans I

alors, la suite de Newton $(x_n)_{n\geq 0}$, de premier terme x_0, est monotone et convergente pour toute valeur x_0 de I telle de $f(x_0)$ ait le signe de f''.

3 Méthode de la sécante

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe au moins un $x^\star \in [a, b]$ tel que $f(x^\star) = 0$.
Pour obtenir une première approximation de ce zéro, l'idée est de remplacer f par la droite D qui passe par les deux points $(a\,,\ f(a))$ et $(b\,,\ f(b))$, soit par

$$D(x) = f(b) + (x - b) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Géométriquement cela revient à remplacer la courbe d'équation $y = f(x)$ par la sécante AB.
x_{n+1} est l'intersection de AB avec l'axe des abscisses.
Comme le montre le dessin, x_{n+1} semble plus voisin du zéro cherché que x_{n-1} ou x_n. Pour trouver une meilleure approximation, il suffit ici de répéter le procédé à l'aide des points B et $C(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$.

4 Nombre d'itérations maximal

Pour ces trois algorithmes, il est nécessaire, en plus d'un test de précision, d'imposer un nombre d'itérations maximal
Cela évite que le programme entre dans une boucle infinie.