

Série I – TE 824

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	12	6	9	8	8	43
Points obtenus						

Problème 1 (12 points)

Soit la série $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ de terme $u_k = \frac{3}{k^2 + k}$.

- Prouver que la série converge. Indiquer le critère utilisé.
- Prouver qu'il existe des nombres réels a et b tels que $\frac{3}{k^2 + k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
- Donner les trois premiers termes et les trois derniers termes de S_n , $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, puis en déduire une formule donnant S_n à l'aide de n .
- Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

4 a) $u_k = \frac{3}{k^2 + k}$; $v_k = \frac{3}{k^2}$

$$u_k - v_k = \frac{3}{k^2 + k} - \frac{3}{k^2} = \frac{3}{k(k+1)} - \frac{3}{k^2} = \frac{3k - 3k - 3}{k^2(k+1)}$$

$$= \frac{-3}{k^2(k+1)}$$

La série de terme u_k est à termes positifs. Comme $u_k \leq v_k$ et que v_k converge (série de Riemann pour $\alpha = 2$), par le 1^{er} critère de comparaison S_n converge.

4 b) $\frac{3}{k(k+1)} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} = \frac{ak + bk + a}{k(k+1)} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a+b=0 \end{cases}$

$\Rightarrow a=3$ et $b=-3$

$$\begin{aligned}
 2 \quad c) \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{3}{k} - \frac{3}{k+1} = 3 - \frac{3}{n+1} \\
 &= \underbrace{\left(\frac{3}{1} - \frac{3}{2}\right)}_{u_1} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{3}\right)}_{u_2} + \underbrace{\left(\frac{3}{3} - \frac{3}{4}\right)}_{u_3} + \dots + \underbrace{\left(\frac{3}{n-2} - \frac{3}{n-1}\right)}_{u_{n-2}} + \underbrace{\left(\frac{3}{n-1} - \frac{3}{n}\right)}_{u_{n-1}} + \underbrace{\left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+1}\right)}_{u_n}
 \end{aligned}$$

$$2 \quad d) \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{3}{n+1} \right) = 3$$

Problème 2 (6 points)

On donne la série suivante :

$$\frac{3}{2} + \frac{3^2}{2 \cdot 4} + \frac{3^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{3^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{3^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \dots$$

a) Déterminer le terme u_k de cette série, pour $k \geq 1$.

b) En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer si la série suivante est convergente.

3 a) $u_1 = \frac{3}{2 \cdot 1!}, u_2 = \frac{3^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2}, u_3 = \frac{3^3}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}; u_k = \frac{3^k}{2^k \cdot k!}$
 $k \geq 1$

3 b) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{k+1} \cdot (k+1)!} \cdot \frac{2^k \cdot k!}{3^k}$
 $= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3}{2 \cdot (k+1)} = 0 < 1$

Donc la suite de terme u_k converge.

Problème 3 (9 points)

Déterminer (préciser le critère utilisé) si les séries suivantes sont convergentes.

a) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{6k+1}$

b) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k}$

c) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{5k+1}$

3 a) $U_k = \frac{k}{6k+1}$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} U_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{6k+1} = \frac{1}{6} \neq 0$$

Le suite (U_k) ne converge pas vers 0, donc la série n'est pas convergente.

3 b) $U_k = \frac{k^2}{2^k}$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{U_{k+1}}{U_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^2} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Par le critère d'Alembert, cette série de terme U_k converge.

3 c) Posons $U_k = \frac{\sqrt{k}}{5k+1}$

la série de terme $V_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge (série de Riemann divergente pour $\alpha = \frac{1}{2}$).

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{U_k}{V_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k}}{5k+1} \cdot \frac{\sqrt{k}}{1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{5k+1} = \frac{1}{5} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{cases}$$

Par le critère d'équivalence, la série de terme U_k diverge.

Problème 4 (8 points)

On donne série alterné :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{k-1}{k^2+1}$$

Répondre aux questions en justifiant les résultats.

- Cette série alternée est-elle convergente ?
- Cette série alternée est-elle absolument convergente ?
- Cette série alternée est-elle semi-convergente ?

4 a) $U_k = \frac{k-1}{k^2+1}$. La suite U_k converge vers 0.

$$U_{k+1} - U_k = \frac{k}{(k+1)^2+1} - \frac{k-1}{k^2+1} = \frac{k^3+k - (k^3+k^2-2)}{(k^2+2k+2)(k^2+1)}$$

$$= \frac{-k^2+k+2}{(k^2+2k+2)(k^2+1)} = \frac{-(k^2-k-2)}{(k^2+2k+2)(k^2+1)} = \frac{-(k-2)(k+1)}{(k^2+2k+2)(k^2+1)}$$

k	-1	2
$-(k-2)(k+1)$	$-$	$+$

$\forall k \geq 2, U_{k+1} \leq U_k$ donc (U_k) est décroissante

Par le critère de Leibniz, la série alternée de terme U_k est convergente

3 b) Posons $V_k = \frac{k-1}{k^2+1} \sim \frac{1}{k} = W_k$. La série de terme W_k est divergente, c'est la série harmonique.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V_k}{W_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{k^2+1} \cdot \frac{k}{1} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array} \right\}$$

Par le critère d'équivalence, la série de terme V_k

est divergente. La série de terme u_n n'est pas absolument convergente.

1 c) La série est semi-convergente.

Problème 5 (8 points)

On considère la série de terme général $u_k = \frac{(1-2x)^k}{3^{k+1}}$ où $x \in \mathbb{R}$ est un paramètre quelconque et $k \geq 1$.

a) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ est convergente. Justifier votre réponse.

b) Pour les valeurs de x trouvées en a), calculer la somme (en fonction de x) de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

4 2) $u_k = \frac{1}{3} \left(\frac{1-2x}{3} \right)^k$

La série de terme u_k est convergente si et seulement si $\left| \frac{1-2x}{3} \right| < 1$.

$$-1 < \frac{1-2x}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < 1-2x < 3 \Leftrightarrow -4 < -2x < 2$$

$$\Leftrightarrow 4 > 2x > -2 \Leftrightarrow 2 > x > -1 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

La série converge si et seulement si $x \in]-1; 2[$

4 b) $S_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1-2x}{3} \right)^k = \frac{1}{3} \left(\frac{1-2x}{3} + \left(\frac{1-2x}{3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1-2x}{3} \right)^n \right)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1-2x}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1-2x}{3} \right)^k$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-2x}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-2x}{3}} = \frac{1-2x}{9} \cdot \frac{3}{2+2x}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1-2x}{2+2x}$$