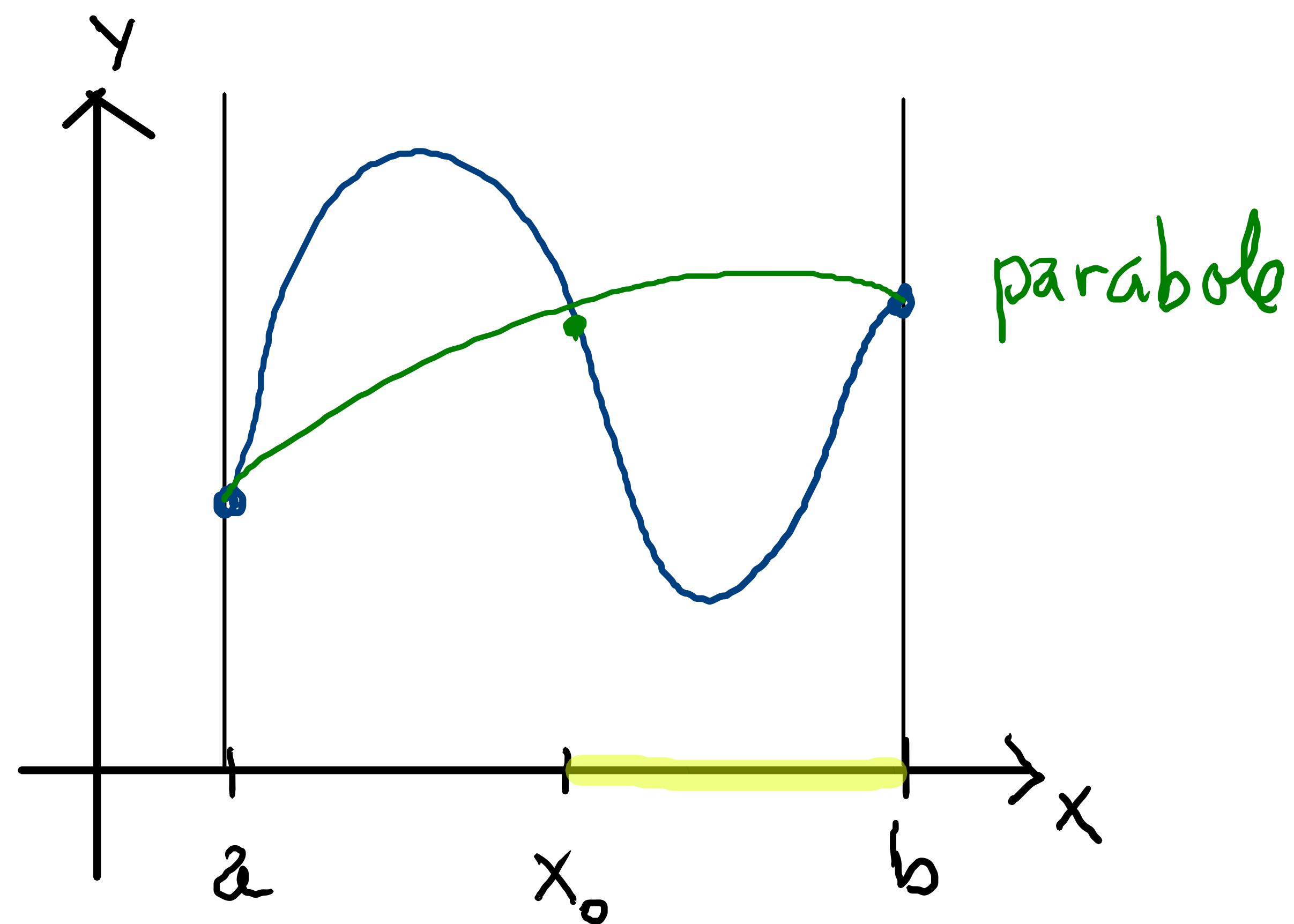


La méthode de Simpson



$$I = [a, b]$$

f continue sur I

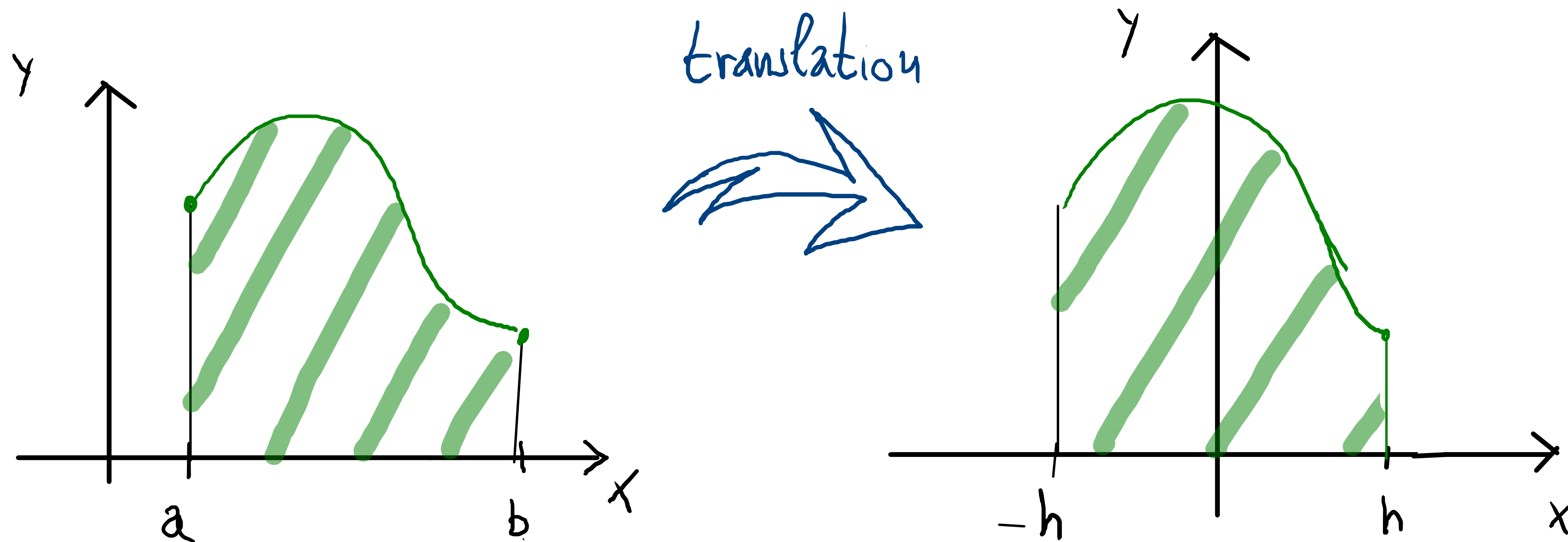
Posons $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et $\underline{h} = \frac{b-a}{2}$

Donc $a = x_0 - h$ et $b = x_0 + h$

On va approcher $A = \int_a^b f(x) dx$ par l'aire

sous la parabole (ou la droite) passant par les points
 $(a, f(a))$, $(x_0, f(x_0))$ et $(b, f(b))$

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx \simeq \int_{x_0-h}^{x_0+h} \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{determiner}} dx$$



$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad n \neq -1$$

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4$$

Par translation

$$\begin{aligned} P &\simeq \int_{-h}^h Ax^2 + Bx + C dx = \left. \frac{A}{3} x^3 + \frac{B}{2} x^2 + Cx \right|_{-h}^h \\ &= \left(\frac{A}{3} h^3 + \frac{B}{2} h^2 + Ch \right) - \left(\frac{A}{3} (-h)^3 + \frac{B}{2} (-h)^2 + C(-h) \right) \\ &= \frac{A}{3} h^3 + \frac{B}{2} h^2 + Ch + \frac{A}{3} h^3 - \frac{B}{2} h^2 + Ch \\ &= \frac{2A}{3} h^3 + 2Ch \end{aligned}$$

Déterminons A , B et C .

Posons $g(x) = Ax^2 + Bx + C$.

On a donc

$$\textcircled{1} \quad g(-h) = Ah^2 - Bh + C = f(x_0 - h)$$

$$\textcircled{2} \quad g(0) = C = f(x_0)$$

$$\textcircled{3} \quad g(h) = Ah^2 + Bh + C = f(x_0 + h)$$

Donc

$$C = f(x_0)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} : \quad 2Ah^2 + 2C = f(x_0 - h) + f(x_0 + h)$$

$$2Ah^2 + 2f(x_0) = f(x_0 - h) + f(x_0 + h)$$

$$2Ah^2 = f(x_0 - h) + f(x_0 + h) - 2f(x_0)$$

$$A = \frac{1}{2h^2} \left[f(x_0 - h) + f(x_0 + h) - 2f(x_0) \right]$$

Substitutions A et C dans

$$P \simeq \frac{2}{3} Ah^3 + 2Ch$$

$$P \simeq \frac{2}{3} h^{\cancel{3}} \frac{1}{\cancel{2h^2}} \left[f(x_0-h) + f(x_0+h) - 2f(x_0) \right] + 2h \cdot f(x_0)$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_0-h) + f(x_0+h) - 2f(x_0) + 6f(x_0) \right]$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_0-h) + 4f(x_0) + f(x_0+h) \right]$$

$$P \simeq \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$