06. 12. 24

CRM, page 90

Suite géométrique

La suite $u_1, u_2, u_3, \ldots$ est une *suite géométrique* de raison r si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = r \cdot u_n$

$\boxed{u_n = u_1 \cdot r^{n-1}}$

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_1 \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r}$	$r \neq 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = u_1 \cdot \dfrac{1}{1-r}$	si $\lvert r\rvert < 1$

Série

La série de terme u_k *converge* si la suite de terme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ converge. La limite de cette suite, notée $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, est la *somme de la série*.

Convergence d'une série à termes positifs

On considère une série de terme $u_k \geq 0$

Critère du quotient (d'Alembert)

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c \text{ et } \begin{cases} c < 1, & \text{la série converge} \\ c > 1, & \text{la série diverge} \end{cases}}$$

Si $c = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Critère de la racine (Cauchy)

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = c \text{ et } \begin{cases} c < 1, & \text{la série converge} \\ c > 1, & \text{la série diverge} \end{cases}}$$

Si $c = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Critères de comparaison

On considère deux séries à termes positifs u_k et v_k et on note p un entier positif non nul.

Si $u_k \leq v_k$ pour tout $k \geq p$ et que la série de terme v_k converge, alors la série de terme u_k converge.
Si $u_k \geq v_k$ pour tout $k \geq p$ et que la série de terme v_k diverge, alors la série de terme u_k diverge.
Si $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{v_k} \neq 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{v_k} \neq +\infty$, alors les séries considérées sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Les deux séries suivantes sont souvent utilisées comme séries de référence.

La série géométrique $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$ converge si $\lvert r\rvert < 1$, diverge sinon.

La série de Riemann $1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \dfrac{1}{4^\alpha} + \ldots$ converge si $\alpha > 1$, diverge sinon.

CRM, page 91

Convergence d'une série alternée

On considère une série de terme $(-1)^k u_k$ avec $u_k \geq 0$

La série converge si, pour tout k, $u_{k+1} \leq u_k$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = 0$

Dans ce cas, on a $\left| \sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_n$

Convergence d'une série à termes quelconques

On considère une série de terme u_k.

Si la série de terme $\lvert u_k \rvert$ converge, alors la série de terme u_k converge.
Si $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k \neq 0$, alors la série de terme u_k diverge.

Les réciproques de ces deux théorèmes sont fausses.

15. Étudier la convergence des séries à termes positifs

a) $\dfrac{1}{k!}$ b) $\dfrac{1}{(k+1)^2-1}$ c) $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

a) on

b) $\dfrac{1}{(K+1)^2-1} \sim \dfrac{1}{K^2}$

On sait que $\sum_{K=1}^{+\infty} \dfrac{1}{K^2}$ converge.

En plus $\dfrac{1}{(K+1)^2-1} = \dfrac{1}{K^2+2K}$.

$$\frac{1}{(K+1)^2-1} - \frac{1}{K^2} = \frac{1}{K^2+2K} - \frac{1}{K^2} = \frac{1}{K(K+2)} - \frac{1}{K^2} = \frac{K-(K+2)}{K^2(K+2)} = \frac{-2}{K^2(K+2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(K+1)^2-1} \leq \frac{1}{K^2} \quad K \geq 1$$

Comme $\sum_{K=1}^{n} \dfrac{1}{K^2}$ converge, par le 1er critère de comparaison $\sum_{K=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(K+1)^2-1}$ est convergente.

c) $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} \sim \underbrace{\dfrac{1}{9k^2}}_{\text{Converge}}$ $\quad \dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$

On essaie :

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} - \frac{1}{9k^2} = \frac{9k^2 - \overbrace{(3k-2)(3k+1)}^{9k^2-3k-2}}{9k^2(3k-2)(3k+1)} = \frac{3k+2}{9k^2(3k-2)(3k+1)} \geq 0 \quad k \geq 1$$

Ce qui nous ne permet pas de conclure par le 1^er^ critère de comparaison.

On essaie encore :

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} - \frac{2}{9k^2} = \frac{-9k^2+6k+4}{9k^2(3k-2)(3k+1)} \leq 0 \qquad \text{pour } k \geq 2$$

On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{9k^2}$ est convergente, alors par le 1^er^ critère de comparaison $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ est convergente.

c) autrement

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{\frac{1}{(3K-2)(3K+1)}}{\frac{1}{9K^2}} = \lim_{K \to +\infty} \frac{9K^2}{9K^2-3K-2} = \underbrace{1}_{\substack{\neq 0 \\ \text{et} \\ \neq +\infty}}$$

par le critère d'équivalence (page 13 de la brochure), notre série est convergente.

16. Étudier la convergence des séries alternées suivantes. Dans le cas de convergence, dire si les séries sont absolument convergentes ou semi-convergentes.

a) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\ldots$

b) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}+\ldots$

c) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}+\ldots$

a) $V_K = (-1)^{K-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2K-1}}_{U_K}$

$$U_{K+1} - U_K = \frac{1}{2(K+1)-1} - \frac{1}{2K-1} = \frac{1}{2K+1} - \frac{1}{2K-1} = \frac{2K-1-2K-1}{(2K+1)(2K-1)} = \frac{-2}{(2K+1)(2K-1)} < 0$$

Ainsi (U_K) est décroissante.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2K-1} = 0$

Par le critère de convergence d'une série alterné, la serie converge.

Déterminons si cette série est absolument convergente.

Nous savons que $\sum\limits_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{K}$ diverge.

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{\frac{1}{2K-1}}{\frac{1}{K}} = \lim_{K \to +\infty} \frac{K}{2K-1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\neq 0 \\ \neq +\infty}}$$

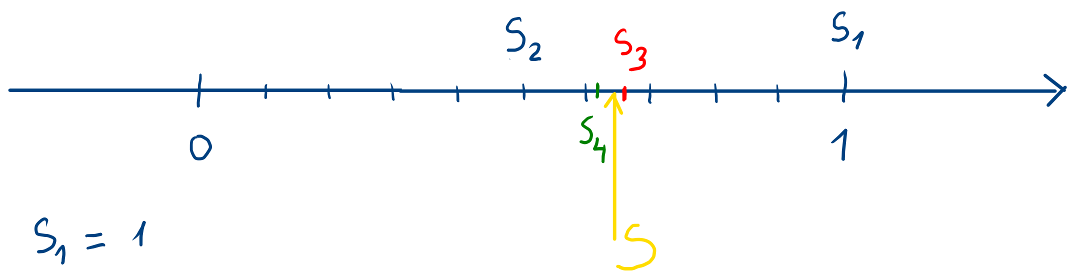
Par le critère d'équivalence, comme $\sum\limits_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{K}$ diverge, alors $\sum\limits_{K=1}^{+\infty} \left| (-1)^{K-1} \frac{1}{2K-1} \right|$ diverge.

Donc, notre série n'est pas absolument convergente. On dit qu'elle est semi-convergente.

17. a) Estimer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} + \ldots$$

par la somme des quatre (cinq) premiers termes.



- $S_1 = 1$

$S_2 = 1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$

$S_4 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{2}{3} - \frac{1}{24} = \frac{16}{24} - \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \cong 0{,}625$ valeur par défaut

$|R_4| < |u_5| \Rightarrow |R_4| < \frac{1}{120} = 0{,}008\overline{3}$

$S \in \left]0{,}625 \,;\, 0{,}625 + 0{,}008\overline{3}\right[$

$S \in \left]0{,}625 \,;\, 0{,}63\overline{3}\right[$

- $S_5 = S_4 + u_5 = \frac{5}{8} + \frac{1}{120} = \frac{76}{120} = \frac{19}{30} \cong 0{,}6\overline{3}$ qui est une valeur par excès

$|R_5| < |u_6| = \frac{1}{720} \cong 0{,}0013\overline{8}$

$S \in \left]0{,}6\overline{3} - 0{,}0013\overline{8} \,;\, 0{,}6\overline{3}\right[$

$S \in \left]0{,}6319\overline{4} \,;\, 0{,}6\overline{3}\right[$

b) Estimer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \ldots$$

par la somme de ses n premiers termes.

$$u_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

série géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$|R_n| < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$|R_n| < \frac{1}{2^n}$$

15 d)

16 d) [b) et c)]