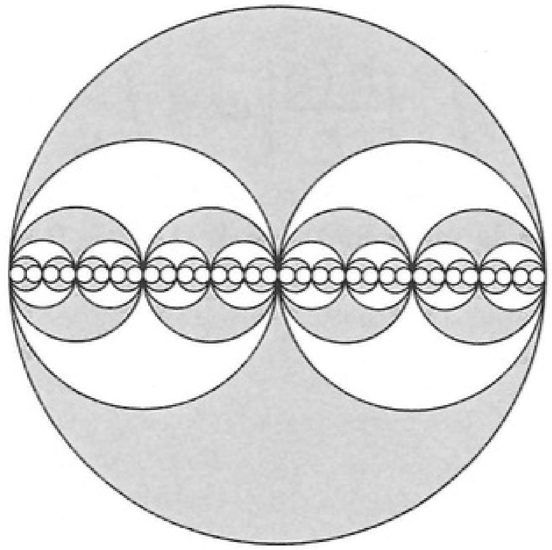
5. On considère la figure suivante où dans chaque cercle sont inscrits deux cercles tangents. Calculer l'aire de la surface grisée si le rayon du grand cercle mesure 1.

15.11.24



Les rayons des disques successifs :

$r_0 = 1, \ r_1 = \frac{1}{2}, \ r = \frac{1}{4}, \ r = \frac{1}{8}, \ ---, \ r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\text{Aire de la surface grise} = \pi 1^2 - 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \pi \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 8 \pi \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \dots$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ---\right)$$

$$= \pi \sum_{K=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^K = \pi \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \pi \frac{1}{\frac{3}{2}} = \pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

6. Trouver une série géométrique de premier terme 1 et de somme 3.

$1, ----$

$$S = 3 = \frac{1}{1-r} \Leftrightarrow 3(1-r) = 1 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

7. Une série géométrique a pour somme 3. Quelles sont les valeurs possibles pour son premier terme ?

$$S = 3 = \frac{a}{1-r} \iff 3(1-r) = a$$

Puisque la série est convergente $|r| < 1$, donc $-1 < r < 1$, $r \in]-1;1[$

- Si $r = -1$: $a = 6$
- Si $r = 1$: $a = 0$

donc $a \in]0;6[$

Les série de Riemann

Théorème

> Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
>
> $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Si une série converge, alors $\frac{1}{n^\alpha} \longrightarrow 0$.

Si $\alpha < 0$, alors son terme général ne tend pas vers zéro. Donc la série diverge.

$$\alpha = -2 \qquad \sum_n \frac{1}{n^{-2}} = \sum_n n^2$$

Donc la condition $\alpha > 0$ est nécessaire pour que la série converge.

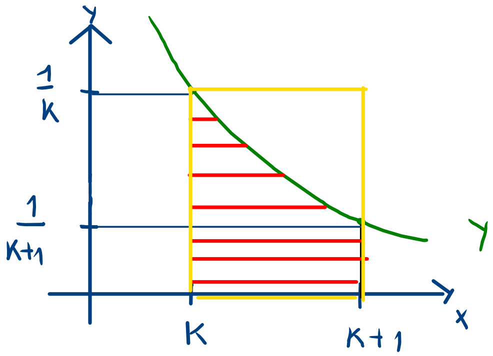
Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

1) $\alpha = 1$ (Série harmonique)

On va prouver que $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n > 1$.

On va minorer S_n



$y = \frac{1}{x}$ est décroissante

Soit $k \geqslant 1$. Alors $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$ est l'aire hachurée en rouge.

Cette aire est inférieure ou égale à l'aire du rectangle jaune

$$\boxed{1 \cdot \frac{1}{k}} \geqslant \boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt}$$

Pour $n \geq 1$, on somme ces inégalités :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geqslant \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \dots + \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$$

$$S_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(t)\Big|_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

Ainsi (S_n) tend vers ∞ et $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.

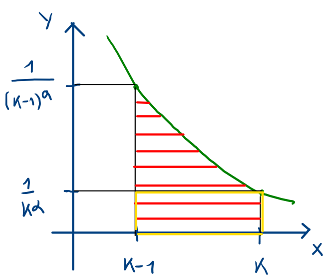
② $\alpha < 1$

Si $\alpha < 1$ et $k \geq 1$, on a $\dfrac{1}{k^\alpha} \geq \dfrac{1}{k}$.

Pour $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$

Donc $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge

③ $\alpha > 1$



$y = \dfrac{1}{x^\alpha}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ est décroissante

$$\boxed{1 \cdot \frac{1}{k^\alpha}} \leq \boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}}$$

Pour $n \geq 2$, on somme ces inégalités pour $k = 2, \dots, n$:

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^2 \frac{dt}{t^\alpha} + \int_2^3 \frac{dt}{t^\alpha} + \dots + \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^n t^{-\alpha}\, dt$$

$$S_n - 1 \leq \frac{1}{-\alpha+1} \, t^{-\alpha+1} \Big|_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$$

$$S_n - 1 \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

Donc $\quad S_n \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$

Donc, la suite des sommes partielles est majorée.

La série est à termes positifs, donc $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ note 3 ; $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$; $\zeta(6) = \dfrac{\pi^6}{945}$; $\zeta(8) = \dfrac{\pi^8}{9450}$; …

8. On considère la suite de terme général $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

a) Calculer les premiers termes de cette suite et deviner une formule pour s_n.

b) Démontrer cette formule par récurrence.

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} s_n$.

$$u_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

a) $S_1 = u_1 = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$

$S_2 = S_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$S_3 = S_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

$\vdots$

$S_n = \frac{n}{2n+1}$

b) Démontrons cette formule par récurrence sur n.

① Vrai $n = 1$

La formule est vraie pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$ (cf a)).

② Supposons la formule vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$.

$$S_n = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} \quad \left(= \frac{n+1}{2(n+1)+1} \right)$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)\cancel{(2n+1)}}{\cancel{(2n+1)}(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

c) $$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$