TE : 20.12.24 22.11.24

9. Montrer que la série de terme $\frac{1}{k(k+2)}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $k \geq 1$ $u_k = \frac{1}{k^2+2k} \leq \frac{1}{k^2}$

On sait que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, c'est une série de Riemann puisque $\alpha = 2$.

Par le premier critère de comparaison, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$ est également convergente

Prouvons par récurrence que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}}$ selon la solution

Corrigé

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{n+2+n+1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

① $n = 1$ : $S_1 = \frac{1}{3}$ ✓ ; $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9-5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ✓

$n = 2$ : $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$ ✓ ; $\frac{3}{4} - \frac{7}{24} = \frac{18-7}{24} = \frac{11}{24}$ ✓

② Supposons le résultat vrai pour $n$ et démontrons-le pour $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \frac{3}{4} - \left(\frac{(2n+3)(n+3)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{2(n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2n^2+9n+9-2n-4}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{4} - \frac{2n^2+7n+5}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{(2n+5)\cancel{(n+1)}}{2\cancel{(n+1)}(n+2)(n+3)} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{2((n+1)+1)((n+1)+2)}$$ cqfd

Ainsi la somme de cette série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{\underset{2n^2+6n+4}{2(n+1)(n+2)}}\right) = \frac{3}{4} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}}_{1/n \quad \to 0} = \frac{3}{4}$$

**Critère de la racine (Cauchy[5])**

On considère une série de terme $u_k \geq 0$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = c \text{ et } \begin{cases} c<1, & \text{la série converge} \\ c>1, & \text{la série diverge} \end{cases}}$$

Si $c = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

13. Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de Cauchy.

a) $\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k + \ldots$

b) $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1} + \ldots$

a) $$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{2k-1} = \frac{1}{2} < 1$$

Par le critère de Cauchy, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k$ converge

$\frac{2k-1}{k} = 2 - \frac{1}{k}$

b) $$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{\frac{2k-1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2-\frac{1}{k}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left[\left(\frac{k}{3k-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{-\frac{1}{k}}\right] = \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^2}_{\frac{1}{9}} \cdot \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{3k-1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}_{1} = \frac{1}{9} < 1$$

Par le critère de Cauchy, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}$ converge

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^2 = \left(\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{3k-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{3k-1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \left(3 - \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} e^{\ln\left(\left(3-\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right)} = \lim_{k\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(3-\frac{1}{k}\right)}{k}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} e^{\frac{1}{k}\ln\left(3-\frac{1}{k}\right)} = e^{0\cdot\ln(3)} = e^0 = 1$$

**Critère du quotient (d'Alembert[6])**

On considère une série de terme $u_k \geq 0$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c \text{ et } \begin{cases} c < 1, & \text{la série converge} \\ c > 1, & \text{la série diverge} \end{cases}}$$

Si $c = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

14. Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de d'Alembert.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{2k-1}{(\sqrt{2})^k} + \ldots$

b) $\dfrac{2}{1} + \dfrac{2\cdot 5}{1\cdot 5} + \dfrac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9} + \ldots + \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3k-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4k-3)} + \ldots$

<u>Vendredi prochain</u>

14 a), b)

12 a), b), c)