29.11.24

14. Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de d'Alembert.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \ldots + \frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k} + \ldots$

b) $\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \ldots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3k-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4k-3)} + \ldots$

CRM

Critère du quotient (d'Alembert)

$$\boxed{\text{Si } \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c \text{ et } \begin{cases} c < 1, & \text{la série converge} \\ c > 1, & \text{la série diverge} \end{cases}}$$

Si $c = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

b) $$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3(k+1)-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4(k+1)-3)} \cdot \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4k-3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3k-1)}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{8} \cdot \ldots \cdot (3k+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4k+1)} \cdot \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot \cancel{(4k-3)}}{\cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{8} \cdot \ldots \cdot \cancel{(3k-1)}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{3k+2}{4k+1} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \text{la série converge}$$

12. Utiliser les critères de comparaison pour étudier la convergence des séries données par leur terme général.

a) $\dfrac{k+1}{k^3}$ b) $\dfrac{k^2+1}{k^3+1}$ c) $\dfrac{1}{k^3-1}$

a) Par le 1^er^ critère de comparaison

- $\dfrac{k+1}{k^3} \sim \dfrac{1}{k^2}$

$$\frac{k+1}{k^3} - \frac{1}{k^2} = \frac{k+1-k}{k^3} = \frac{1}{k^3} > 0 \qquad k \geq 1$$

Cela ne fonctionne pas

- $$\frac{k+1}{k^3} - \frac{2}{k^2} = \frac{k+1-2k}{k^3} = \frac{1-k}{k^3} < 0 \qquad k > 1$$

Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k^3}$ converge.

b) $$\frac{k^2+1}{k^3+1} - \frac{1}{k} = \frac{k(k^2+1)-(k^3+1)}{k(k^3+1)} = \frac{k-1}{k(k^3+1)} > 0 \quad , \text{ si } k > 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{k^2+1}{k^3+1}}_{\text{diverge}} > \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{diverge}}$$

diverge $\Leftarrow$ diverge

c) - $\dfrac{1}{k^3-1} \sim \dfrac{1}{k^3}$

$$\frac{1}{k^3-1} - \frac{1}{k^3} = \frac{k^3-(k^3-1)}{k^3(k^3-1)} = \frac{1}{k^3(k^3-1)} > 0 \qquad k > 1$$

Le critère de comparaison ne permet pas de conclure

- $$\frac{1}{k^3-1} - \frac{2}{k^3} = \frac{k^3-2k^3+2}{k^3(k^3-1)} = \frac{2-k^3}{k^3(k^3-1)} < 0 \qquad k > 1$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ est convergente, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3-1}$ converge

10. Trouver le terme et la somme de la série

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\dots$$

① $\boxed{U_K = \frac{2}{K(K+1)}}$ $\quad K \geq 1$

$$\sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$
$$S_n = n + (n-1) \quad + 2 + 1$$
$$2S_n = (n+1) + \quad (n+1) \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

② Déterminer la somme. (on décompose $\frac{1}{K(K+1)}$ en éléments simples)

$$S_n = \sum_{K=1}^{n} \frac{2}{K(K+1)} = 2\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K(K+1)} = 2\left(\sum_{K=1}^{n} \frac{A}{K} + \frac{B}{K+1}\right) = *$$

$$\frac{1}{K(K+1)} = \frac{A(K+1)+BK}{K(K+1)} = \frac{(A+B)K + A}{K(K+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A+B = 0 \end{cases} \Rightarrow B = -1$$

$$= \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}$$

$$* = 2\left(\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}\right) = 2\left(\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots \cancel{} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{K=1}^{+\infty} U_K = 2\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2$$

15. Étudier la convergence des séries à termes positifs

a) $\dfrac{1}{k!}$ b) $\dfrac{1}{(k+1)^2-1}$ c) $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

16. Étudier la convergence des séries alternées suivantes. Dans le cas de convergence, dire si les séries sont absolument convergentes ou semi-convergentes.

a) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \ldots$

b) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} + \ldots$

c) $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16} + \ldots + \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \ldots$

Vendredi prochain