4.2.4 30.08.24

c) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{2}\sin(x)$

1) Cette fonction admet un zéro

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 0.42073549240394825 \end{array}\right\} f(0)\cdot f(1) < 0$$

Donc il existe un zéro dans $I = [0,1]$.

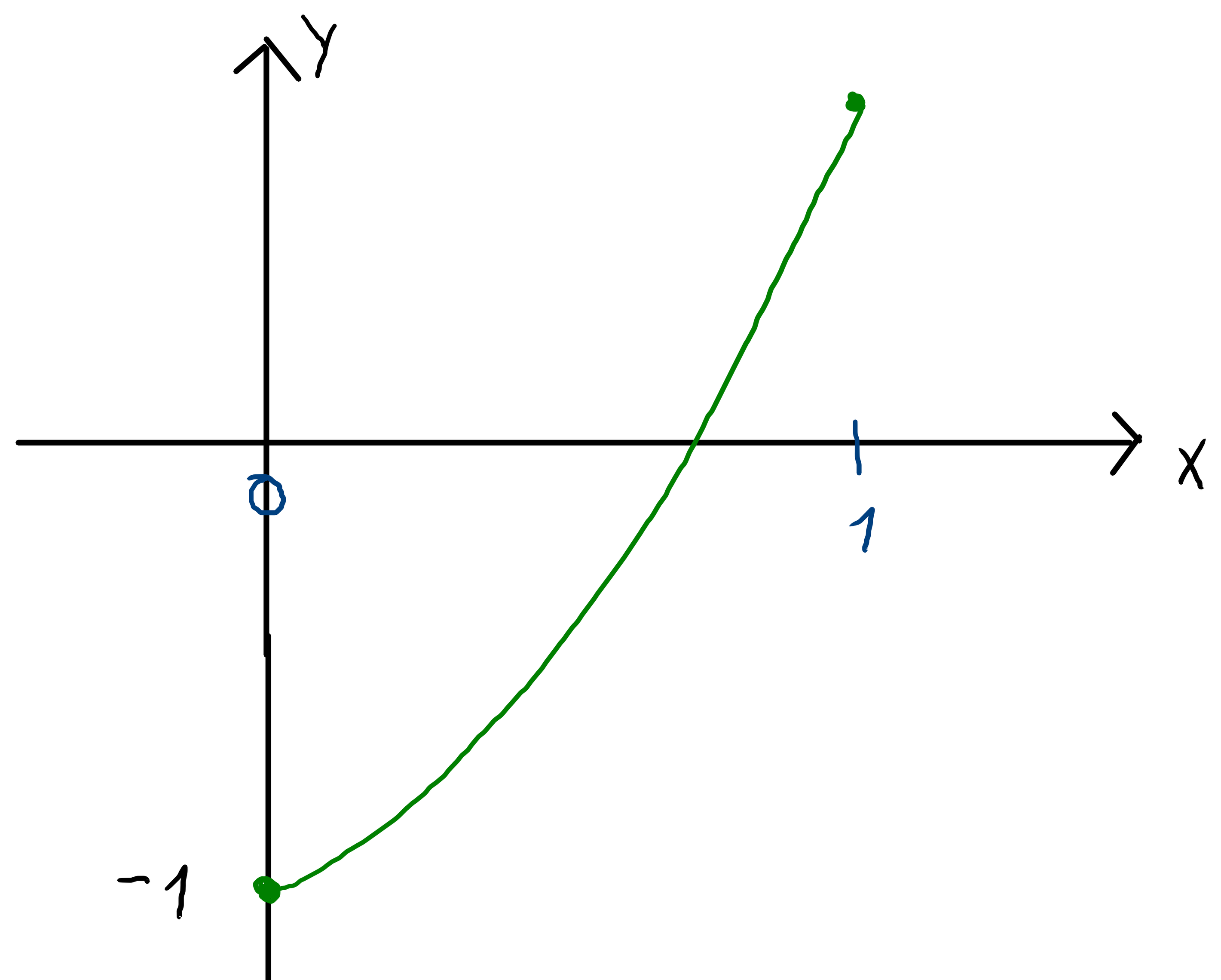
2) Ce zéro est unique.

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ f strictement croissante.

$\frac{1}{2}\cdot(-1) \leq \frac{1}{2}\cos(x) \leq 1\cdot\frac{1}{2}$

Comme f s'annule dans $[0;1]$ et que f est strictement croissante, f admet un unique zéro dans $[0;1]$.

Passons à l'algo.



4.3.4 Soit la fonction

$$f(x) = x^3 - 2\,x - 5$$

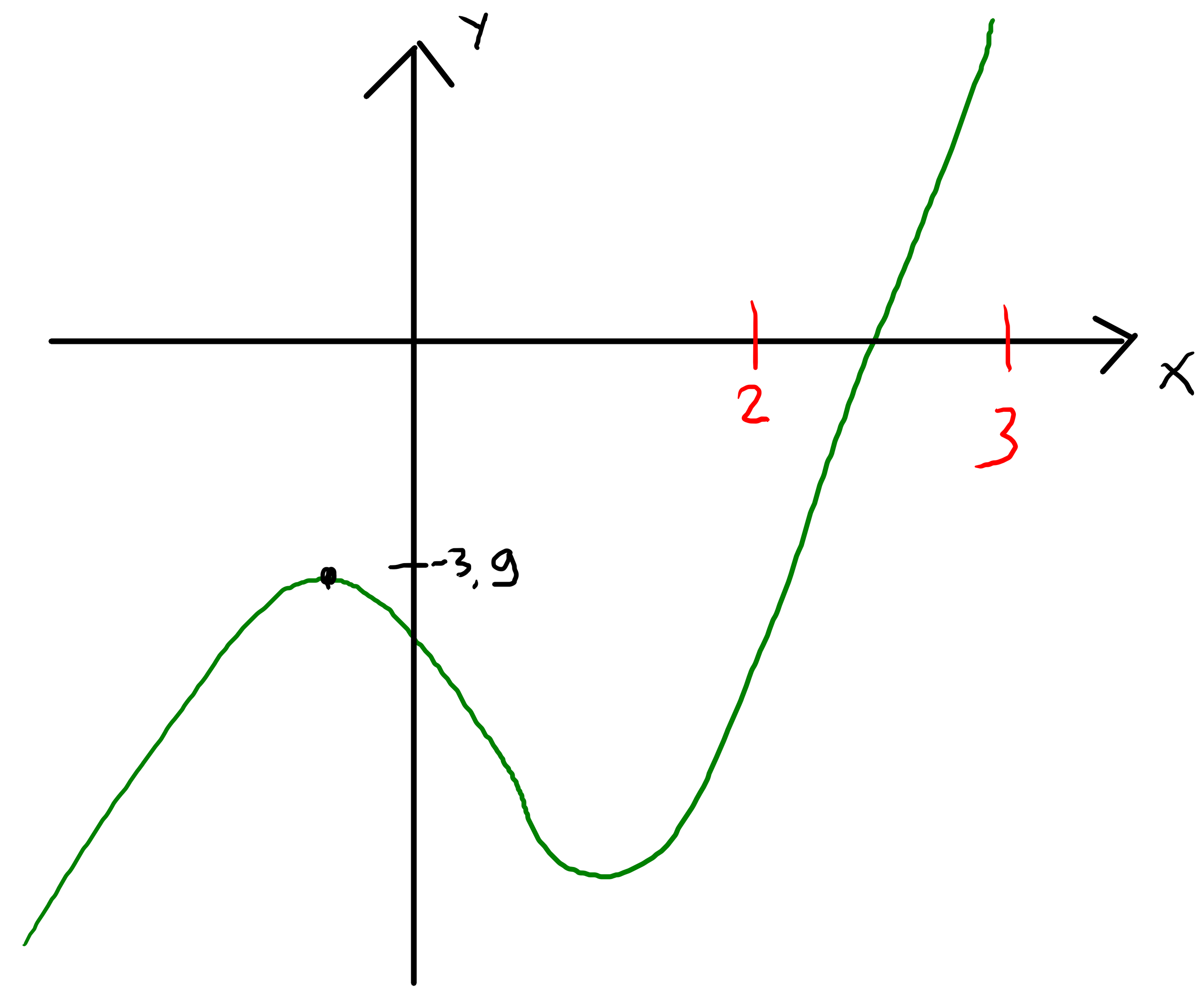
a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Montrer que $2 < \alpha < 3$.

b) A partir de $x_0 = 1$, déterminer le zéro de la fonction.

1) $f'(x) = 3x^2 - 2$

Tableau de la croissance :

x		$-\sqrt{2/3}$		$\sqrt{2/3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$



zéro de la dérivée :

$$3x^2 - 2 = 0 \quad \Big| \div 3$$
$$x^2 - \frac{2}{3} = 0$$
$$\left(x - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 0$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq -3{,}9$$

Donc f n'admet qu'un seul zéro x^*

2) $x^* \in \,]2;3[$. En effet

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= -1 \\ f(3) &= 16 \end{aligned}\right\} \quad f(2)\cdot f(3) < 0$$

b) Partir de $x_0 = 1$ est une mauvaise idée.

$\boxed{\text{Il vaut mieux choisir } x_0 = 3}$