Table des matières

Petit lexique de géométrie

0.1 Notations

Les points sont notés en majuscule. Par contre les droites, les cercles, les plans ou les angles sont notés en minuscule.

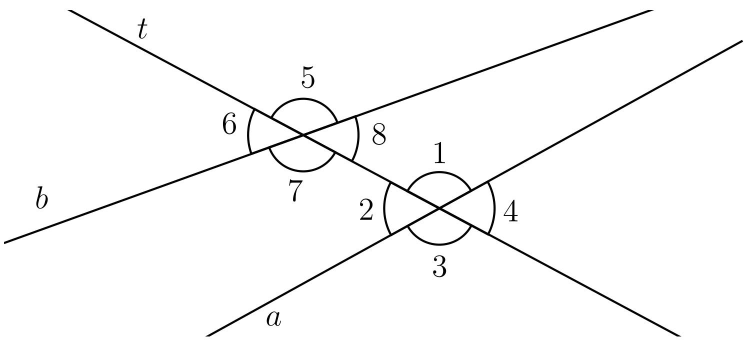
Exemples :

Δ ABC	triangle de sommets A, B et C
γ(O ; r)	cercle de centre O et de rayon r
a // b	droite a parallèle à la droite b
c $\perp$ d	droite c perpendiculaire à d
δ(d ;A)	distance de la droite d au point A
σ(ABCD)	aire du quadrilatère ABCD

0.2 Angles

Un angle nul est un angle convexe dont les côtés sont confondus.
Un angle plein est un angle non-convexe dont les côtés sont confondus.
Un angle plat est un angle dont les côtés sont alignés et non confondus.
Un angle droit est un angle convexe dont les côtés forment un angle de 90°.
Deux angles adjacents sont supplémentaires s'ils forment un angle plat.
Deux angles adjacents sont complémentaires s'ils forment un angle droit.
Un angle aigu est un angle plus petit qu'un angle droit et un angle obtus est un angle convexe plus grand qu'un angle droit.
Deux droites sécantes a et b forment des angles opposés par le sommet. Deux angles opposés par le sommet sont isométriques.
Une transversale t coupant deux droites distinctes a et b détermine avec elle des angles qu'on appelle :

alternes-internes :	1 et 7 ; 2 et 8
alternes-externes :	3 et 5 ; 4 et 6
correspondants :	1 et 5 ; 2 et 6 ; 3 et 7 ; 4 et 8



Théorème de la transversale

Les angles alternes-internes, alternes-externes ou correspondants sont isométriques si et seulement si a est parallèle à b.

Un angle au centre d'un cercle est un angle dont le sommet est le centre du cercle.
Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés coupent le cercle.

Théorème de l'angle au centre

Dans un cercle, la mesure de l'angle inscrit est égal à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc.

Corollaire du théorème de l'angle au centre : théorème de l'angle inscrit

Dans un cercle, deux angles inscrits interceptant le même arc sont isométriques.

0.3 Droites

Deux droites sont parallèles si elles n'ont aucun point en commun ou si elles sont confondues. Deux droites sont strictement parallèles si elles n'ont aucun point en commun.

Théorème de Thalès

Soit un triangle ABC et deux points B' et C' sur les droites AB et AC respectivement.

BC est parallèle à B'C' si et seulement si $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$.

Généralisation du théorème de Thalès

Trois droites a, b, c déterminent sur deux droites s et t des sections semblables ($\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots$) si et seulement si les droites a, b et c sont parallèles.

La projection orthogonale ou **projection** d'un point P sur une droite d est le point d'intersection P' de d avec sa perpendiculaire passant par P.

La distance δ(d ; P) de la droite d au point P est la distance δ(P ; P') de P à P' (sa projection orthogonale sur la droite d).

La distance entre deux droites parallèles est la distance de l'une des droites à un point de l'autre.

La médiatrice d'un segment AB est la perpendiculaire à ce segment passant par son milieu ; c'est aussi l'axe de symétrie du segment et le lieu géométrique des points équidistants des extrémités du segment.

La bissectrice intérieure d'un angle est une droite partageant l'angle en deux angles isométriques ; c'est aussi l'axe de symétrie qui transforme l'un des côtés de l'angle en l'autre et le lieu géométrique des points équidistants des deux côtés de l'angle.

0.4 Triangles

Théorème du segment moyen

Dans tout triangle le segment qui relie les milieux de deux côtés est parallèle au troisième et en mesure la moitié.

La somme des angles intérieurs d'un triangle est égal à un angle plat.

Théorème de l'angle externe

L'angle externe en un sommet d'un triangle égale la somme des angles intérieurs aux deux autres sommets.

La médiatrice d'un triangle est la médiatrice de l'un de ses côtés. Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes ; leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle.

La médiane d'un triangle est une droite reliant un sommet du triangle au milieu du côté opposé. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes ; leur point d'intersection est le centre de gravité ou le barycentre du triangle. Les médianes d'un triangle se coupent au deux tiers un tiers depuis chaque sommet.

La hauteur d'un triangle est la perpendiculaire à un côté passant par le sommet opposé. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes ; leur point d'intersection est l'orthocentre du triangle.

La bissectrice d'un triangle est la bissectrice de l'un de ses angles. Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes ; leur point d'intersection est le centre du cercle inscrit au triangle.

Théorème des bissectrices

Dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure (extérieure) issue de A coupe la droite BC en un point P (P' si le triangle n'est pas isocèle en A) tel que : $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$ ($\frac{P'B}{P'C} = \frac{AB}{AC}$).

Réciproquement, tout point M de la droite BC tel que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ appartient à l'une des bissectrices issues de A.

L'aire d'un triangle est égale au demi-produit d'un côté par la hauteur correspondante.

Cas d'isométrie des triangles

1er cas : deux triangles sont isométriques s'ils ont respectivement un angle et les côtés adjacents isométriques.

2^{e} cas : deux triangles sont isométriques s'ils ont respectivement un côté et deux angles qui ont les mêmes positions isométriques.

3^{e} cas : deux triangles sont isométriques s'ils ont respectivement les trois côtés isométriques.

Cas de similitude des triangles

1er cas : deux triangles sont semblables s'ils ont respectivement deux angles isométriques.

2^{e} cas : deux triangles sont semblables s'ils ont respectivement un angle isométrique et les côtés adjacents proportionnels.

3^{e} cas : deux triangles sont semblables s'ils ont respectivement les trois côtés proportionnels.

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des cathètes (la réciproque est aussi vraie).

Théorème de Pythagore dans l'espace

Dans un parallélépipède rectangle, le carré de la longueur d'une diagonale est égal à la somme des carrés des longueurs des trois arêtes issue d'un même sommet.

Théorème d'Euclide

Dans un triangle rectangle, chaque cathète est moyenne géométrique de sa projection orthogonale sur l'hypoténuse et de l'hypoténuse (la réciproque est aussi vraie).

Théorème de la Hauteur

Dans un triangle rectangle, la hauteur issue de l'angle droit est moyenne géométrique des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse (la réciproque est aussi vraie).

0.5 Cercles

Le **cercle de Thalès** d'un segment est le cercle admettant ce segment pour diamètre.

Théorème du produit constant

Sur toutes les sécantes d'un cercle donné γ passant par un même point donné P non situé sur γ, le produit des segments issus de P et arrêtés au cercle γ est le même (= Cte).

La puissance d'un point P par rapport à un cercle γ, notée $\mathrm{p}(\mathrm{P}\,;\,\gamma)$, est le produit constant des segments issus de P et arrêtés à γ sur une même sécante de γ (si $\mathrm{P} \in \gamma$, alors $\mathrm{p}(\mathrm{P}\,;\,\gamma) = 0$).

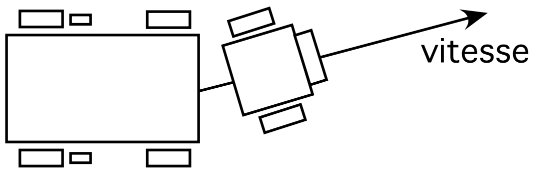
Une tangente à un cercle est une droite dont l'intersection avec le cercle se réduit à un point : le point de contact. Le segment reliant le point de contact au centre du cercle est perpendiculaire à la tangente.

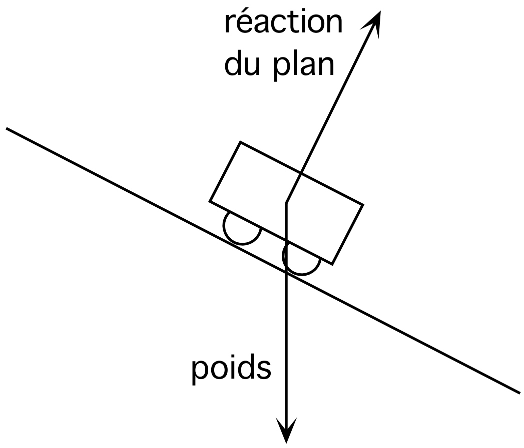
La circonférence d'un cercle est égale au double produit de son rayon par π.

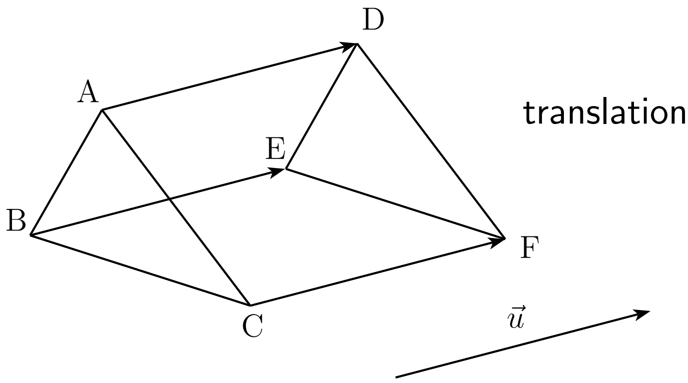
L'aire d'un disque est égale au produit du carré de son rayon par π.

1 Les vecteurs

1.1 La notion de vecteur







Notations :

a) $\vec{u}$ est un vecteur dont la position n'est pas fixe dans le plan ; seuls comptent sa direction, son sens et sa longueur.

b) $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur d'origine A, d'extrémité D et dont la longueur vaut la distance $\delta(A; D)$.

c) Deux vecteurs de même direction, de même sens et de même longueur sont des vecteurs **équipollents** ($\overrightarrow{AD}$ est équipollent à $\overrightarrow{BE}$ et à $\overrightarrow{CF}$).

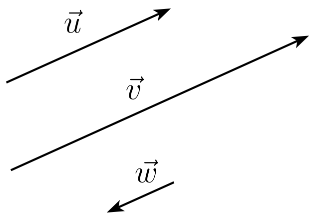
d) $\overrightarrow{AA}$ est un vecteur **nul** qui se note $\vec{0}$.

e) La norme (longueur) du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ se note $\|\vec{u}\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \delta(A; D) \geq 0$.

Définitions :

1) Un **vecteur** est l'ensemble de toutes les flèches (segments orientés) équivalentes ou équipollentes qui définissent la même translation. Chaque flèche est un **représentant** du vecteur. Un vecteur non nul est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme qui sont respectivement la direction, le sens et l'amplitude de la translation associée.

2) Des vecteurs de même direction sont **colinéaires**.

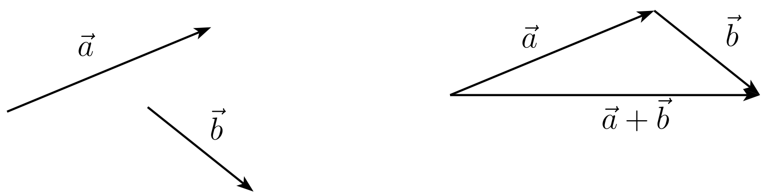


$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

3) E_2 désigne l'ensemble des points du plan, E_3 l'ensemble des points de l'espace et **E** l'un ou l'autre de ces ensembles. De même V_2 désigne l'ensemble des vecteurs du plan, V_3 l'ensemble des vecteurs de l'espace et **V** l'un ou l'autre de ces ensembles.

1.2 Addition des vecteurs

Définition :
La somme de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur correspondant à la composition des deux translations associées aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On le note $\vec{a} + \vec{b}$.

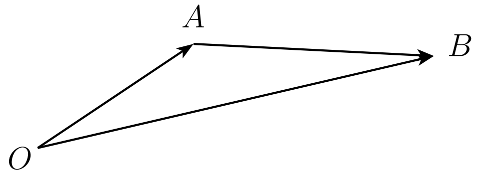


Pour construire la somme des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on choisit des représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que l'origine du représentant de $\vec{b}$ coïncide avec l'extrémité du représentant de $\vec{a}$.

Remarques :

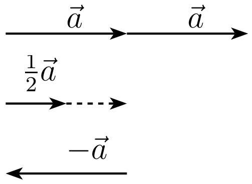
a) La différence des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est l'addition du vecteur $\vec{a}$ et du vecteur opposé à $\vec{b}$ (vecteur de même direction, de sens contraire et de même norme que $\vec{b}$).
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

b) Soit O, A et B trois points quelconques :



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

1.3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel



$2\vec{a}$ (on a multiplié $\vec{a}$ par 2)

$\frac{1}{2}\vec{a}$ (on a multiplié $\vec{a}$ par $\frac{1}{2}$)

$-\vec{a}$ (on a multiplié $\vec{a}$ par -1)

Définition :
Soit k un nombre réel et $\vec{a}$ un vecteur. **Le produit du vecteur $\vec{a}$ par le nombre réel k**, noté $k \cdot \vec{a}$, est le vecteur caractérisé par :
- la direction du vecteur $\vec{a}$;
- le sens du vecteur $\vec{a}$ si k $>$ 0 et le sens contraire si k $<$ 0 ;
- une norme égale au produit de celle du vecteur $\vec{a}$ par la valeur absolue de k.

$\Rightarrow \qquad \|k \cdot \vec{a}\| = |k| \cdot \|\vec{a}\|$

Quelques propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$ $\qquad \forall\, k \in \mathbb{R}$ et $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$

2) $(k + m) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a}$ $\qquad \forall\, k, m \in \mathbb{R}$ et $\forall\, \vec{a} \in V$

3) $k(m \cdot \vec{a}) = (km) \cdot \vec{a}$ $\qquad \forall\, k, m \in \mathbb{R}$ et $\forall\, \vec{a} \in V$

4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ $\qquad \forall\, \vec{a} \in V$

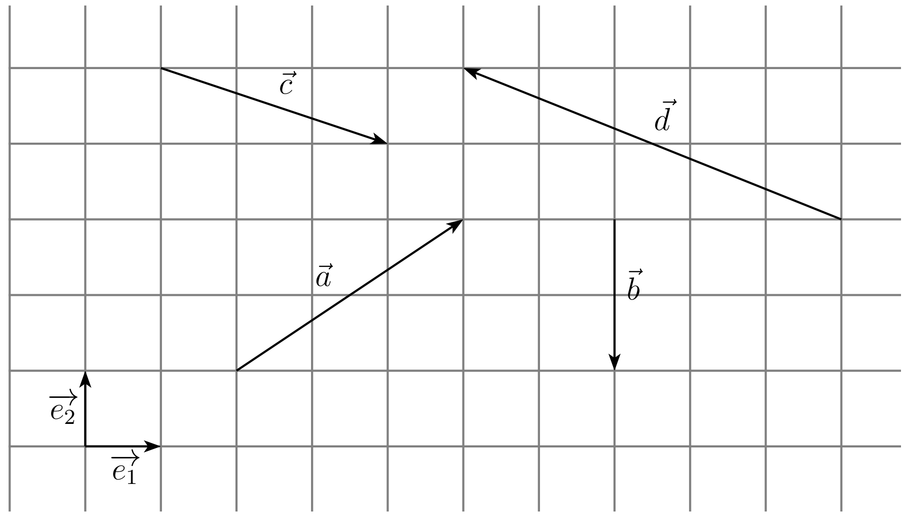
5) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ $\qquad \forall\, \vec{a} \in V$

Définitions :

1) $\vec{a}$ est **une combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, ..., $\overrightarrow{e_n}$ s'il existe des nombres a_1, a_2, ..., a_n tels que : $\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + ... + a_n\overrightarrow{e_n}$

2) Des vecteurs sont **linéairement dépendants** si l'un d'eux au moins est une combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, ils sont **linéairement indépendants**.

Exemple :



$$\vec{a} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$$
$$\vec{b} = -2\overrightarrow{e_2}$$
$$\vec{c} = 3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$$
$$\vec{d} = -5\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$$

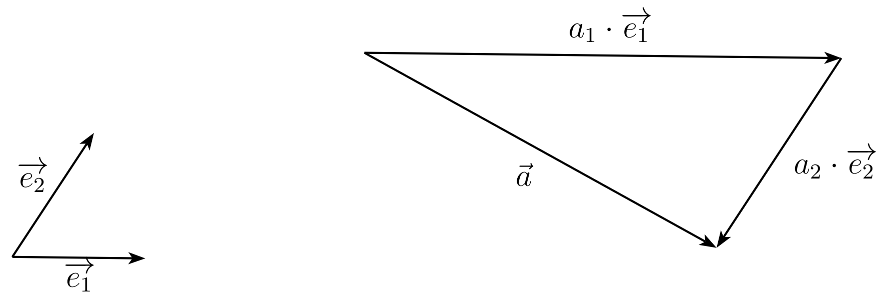
2 Base de vecteurs

2.1 Base de l'ensemble des vecteurs du plan

Considérons dans le plan deux vecteurs $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ linéairement indépendants (non colinéaires), alors tout vecteur $\vec{a}$ du plan est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

Si $\vec{a}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{e_1}$ (ou $\overrightarrow{e_2}$), il suffit de multiplier $\overrightarrow{e_1}$ par un facteur $k=\frac{||\vec{a}||}{||\overrightarrow{e_1}||}$ (ou $k=\frac{||\vec{a}||}{||\overrightarrow{e_2}||}$).

Si $\vec{a}$ est ni colinéaire avec $\overrightarrow{e_1}$ et ni colinéaire avec $\overrightarrow{e_2}$, il existe un unique triangle (à isométrie près) ayant comme côtés :
- le vecteur $\vec{a}$;
- un côté parallèle au vecteur $\overrightarrow{e_1}$;
- un côté parallèle au vecteur $\overrightarrow{e_2}$.



$$\Rightarrow \qquad \vec{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$$

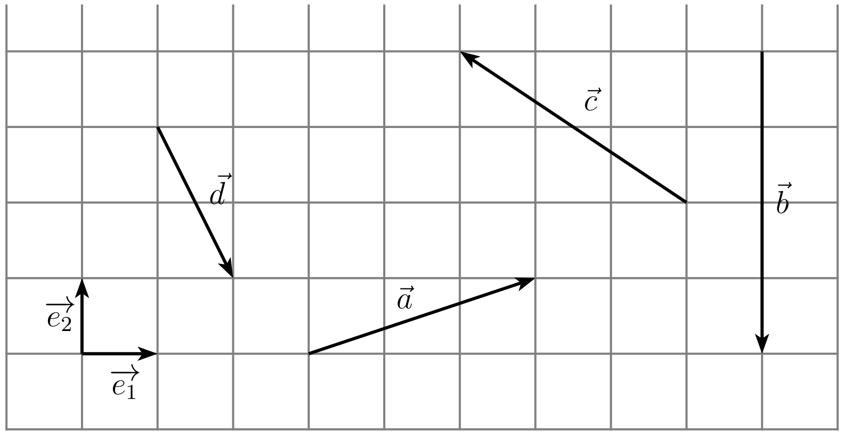
Définition :
Une **base de $\mathbf{V}_2$** est un couple de deux vecteurs $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ linéairement indépendants (non colinéaires).

Soit $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ une base fixée ; tout vecteur $\vec{a}$ de V_2 s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Les nombres réels a_1 et a_2 sont **les composantes numériques** du vecteur $\vec{a}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

Exemple :



$$\vec{a} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = 0\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = -3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit deux vecteurs donnés par leurs composantes numériques dans la base $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ et un nombre réel k :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Les composantes numériques de la somme des deux vecteurs sont égales à la somme des composantes numériques des vecteurs :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Les composantes numériques du vecteur $k \cdot \vec{a}$ sont égales aux composantes numériques du vecteur $\vec{a}$ multipliées par le nombre réel k :

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

Exemples :

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

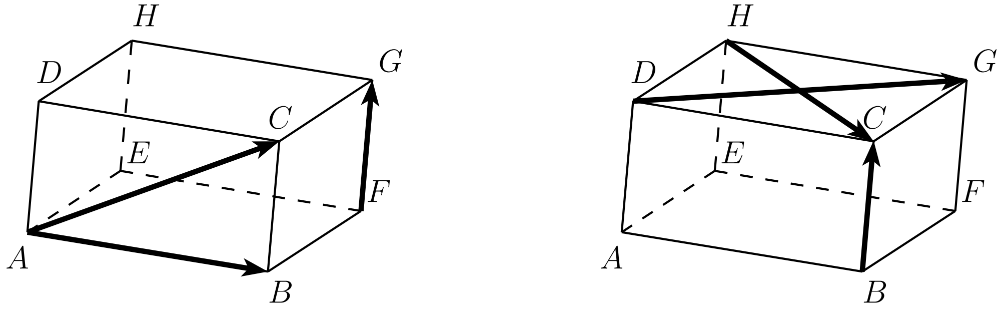
a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ -3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $2\vec{a} - 4\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+20 \\ -6-28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -34 \end{pmatrix}$

2.2 Base de l'ensemble des vecteurs de l'espace

Définition : des vecteurs de l'espace sont **coplanaires** s'ils sont représentables par des flèches contenues dans un même plan.

Exemples Soit un parallélépipède ABCDEFGH :



$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires.

$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{DG}$ ne sont pas coplanaires.

Remarques

a) Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires.

b) trois vecteurs non nuls de l'espace sont coplanaires si et seulement si l'on peut exprimer l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

La décomposition d'un vecteur dans le plan se généralise à l'espace en choisissant trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ non coplanaires.

Définition :
Une **base de V**$_3$ est un triplet de vecteurs non coplanaires $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$.

Soit $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ une base fixée ; tout vecteur $\vec{a}$ de V_3 s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + a_3 \cdot \overrightarrow{e_3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Les nombres réels a_1, a_2 et a_3 sont **les composantes numériques** du vecteur $\vec{a}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$.

Théorème

Soit deux vecteurs donnés par leurs composantes numériques dans la base $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et un nombre réel k :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Les composantes numériques de la somme des deux vecteurs sont égales à la somme des composantes numériques des vecteurs :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Les composantes numériques du vecteur $k \cdot \vec{a}$ sont égales aux composantes numériques du vecteur $\vec{a}$ multipliées par le nombre réel k :

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

2.3 Dépendance linéaire et algèbre

Théorème

Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\det\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

<u>Démonstration</u> :

$(\Rightarrow)$ $\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires $\quad \Rightarrow \vec{a} = k\vec{b} = k\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 \\ kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = kb_1b_2 - kb_2b_1 = 0$

$(\Leftarrow)$ $\det\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \qquad \Rightarrow a_1 = \dfrac{a_2b_1}{b_2}$

$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_2b_1}{b_2} \\ \\ a_2 \end{pmatrix} = \dfrac{a_2}{b_2}\begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_2 \end{pmatrix} = k\vec{b} \qquad \Rightarrow \vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires $\qquad$ cqfd

Exemples :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-9) - 7 \cdot 4 = 27 - 28 = -1$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires (linéairement indépendants).

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -9 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 - (-4)\cdot(-9) = 36 - 36 = 0$

Les vecteurs sont colinéaires (linéairement dépendants) : $\vec{b} = -\frac{4}{3}\vec{a}$.

Remarque : trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de V_3 sont linéairement indépendants si et seulement si, quels que soient les réels α, β et γ, on a :

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Théorème

Soit $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de V_3, alors tout vecteur $\vec{a}$ de V_3 peut s'exprimer d'une manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$.

Démonstration :

supposons que $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$

alors $(a_1 - \lambda_1)\vec{e_1} + (a_2 - \lambda_2)\vec{e_2} + (a_3 - \lambda_3)\vec{e_3} = \vec{0}$

comme $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ lin. indép. $\Rightarrow \quad a_1 - \lambda_1 = a_2 - \lambda_2 = a_3 - \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow a_1 = \lambda_1 \quad a_2 = \lambda_2 \quad a_3 = \lambda_3$ cqfd

Théorème

Soit trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ dans la base $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ sont coplanaires $\quad\Leftrightarrow\quad \det\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right) = 0$

Remarque :

$$\det\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$a_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - a_2\left(b_1c_3 - b_3c_1\right) + a_3\left(b_1c_2 - b_2c_1\right) =$$

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Démonstration :

$(\Rightarrow)$: $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ coplanaires $\quad \Rightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$

$$\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha a_1 + \beta b_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha a_2 + \beta b_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha a_3 + \beta b_3 \end{vmatrix} = \alpha a_1b_2a_3 + \beta a_1b_2b_3 - \alpha a_1b_3a_2 - \beta a_1b_3b_2 - \alpha a_2b_1a_3 -$$

$$\beta a_2b_1b_3 + \alpha a_2b_3a_1 + \beta a_2b_3b_1 + \alpha a_3b_1a_2 + \beta a_3b_1b_2 - \alpha a_3b_2a_1 - \beta a_3b_2b_1 = 0$$

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 = 0$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{-a_1b_2c_3 - b_1c_2a_3 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2} = \frac{(b_3c_2 - b_2c_3)a_1 + (c_3a_2 - a_3c_2)b_1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{b_3c_2 - b_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot a_1 + \frac{c_3a_2 - a_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot b_1$$

$$\Rightarrow \frac{b_3c_2 - b_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot a_2 + \frac{c_3a_2 - a_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot b_2 = \frac{a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + b_2c_3a_2 - b_2a_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} = \frac{a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} =$$

$$\frac{c_2(a_2b_3 - a_3b_2)}{a_2b_3 - a_3b_2} = c_2$$

$$\Rightarrow \frac{b_3c_2 - b_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot a_3 + \frac{c_3a_2 - a_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot b_3 = \frac{a_3b_3c_2 - a_3b_2c_3 + b_3c_3a_2 - b_3a_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} = \frac{a_2b_3c_3 - a_3b_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2} =$$

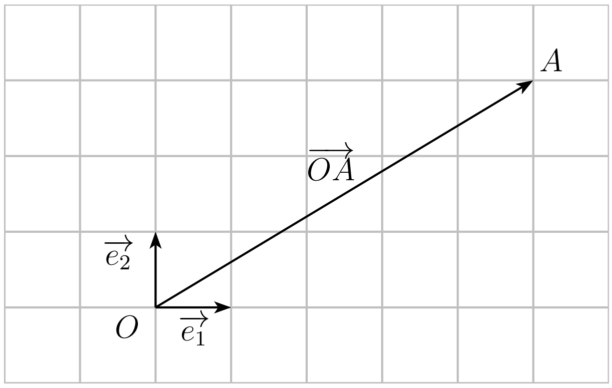
$$\frac{c_3(a_2b_3 - a_3b_2)}{a_2b_3 - a_3b_2} = c_3$$

$\Rightarrow \vec{c} = \dfrac{b_3c_2 - b_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot \vec{a} + \dfrac{c_3a_2 - a_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot \vec{b}$ $\quad\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ lin. dépendants, donc coplanaires.

3 Repères et coordonnées

3.1 Repères dans le plan

Définition :
Un repère du plan est formé d'un point O et d'une base $B = (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ du plan vectoriel. O est **l'origine** et $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ **la base associée** du repère.



Les coordonnées du point A du plan à un repère $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_1})$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ relativement à la base associée :

$$A(a_1;a_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

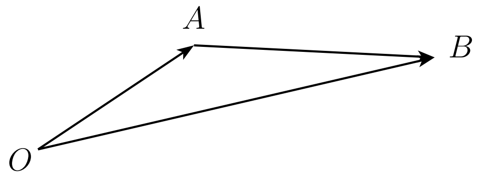
a_1 est la première coordonnée ou abscisse du point A
a_2 est la deuxième coordonnée ou ordonnée du point A

Remarque :
Il ne faut pas confondre les notations des vecteurs et celles des points !

Dans l'espace : $A(a_1;a_2;a_3) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

3.2 Calculs avec les coordonnées dans le plan

Composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$
Par la relation de Chasles :



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Soit $A(a_1;\ a_2)$ et $B(b_1;\ b_2)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont égales à la différence des coordonnées respectives de son extrémité B et de son origine A.

Dans l'espace : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Coordonnées du milieu M du segment $\overrightarrow{AB}$

Soit $A(a_1;\ a_2)$ et $B(b_1;\ b_2)$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1 + b_1}{2} \\ \dfrac{a_2 + b_2}{2} \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad M\left(\frac{a_1 + b_1}{2};\ \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont égales à la moyenne arithmétique des coordonnées des points A et B.

Dans l'espace : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1 + b_1}{2} \\ \dfrac{a_2 + b_2}{2} \\ \dfrac{a_3 + b_3}{2} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad M\left(\frac{a_1 + b_1}{2};\ \frac{a_2 + b_2}{2};\ \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$

Coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC

Soit $A(a_1;\ a_2)$, $B(b_1;\ b_2)$ et $C(c_1;\ c_2)$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1+b_1+c_1}{3} \\ \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \qquad G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OG}$ sont égales à la moyenne arithmétique des coordonnées des points A, B et C.

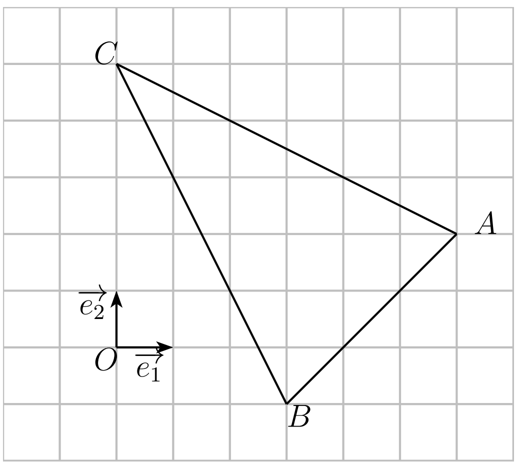
Dans l'espace :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1+c_1}{3} \\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3} \\ \frac{a_3+b_3+c_3}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad G\left(\tfrac{a_1+b_1+c_1}{3};\ \tfrac{a_2+b_2+c_2}{3};\ \tfrac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)}$$

Exemple :

Soit $A(6;\ 2)$, $B(3;\ -1)$ et $C(0;\ 5)$

Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées du milieu I du segment BC et les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

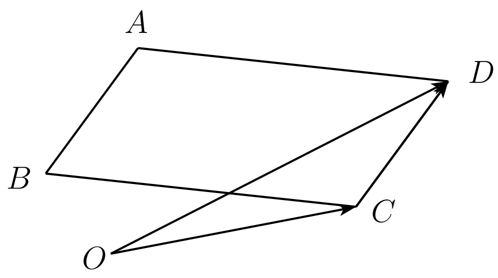


$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$I\left(\frac{3+0}{2};\ \frac{-1+5}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad I\left(\frac{3}{2};\ 2\right)$$

$$G\left(\frac{6+3+0}{3};\ \frac{2+(-1)+5}{3}\right) \qquad \Rightarrow \qquad G\,(3;\ 2)$$

3.3 Coordonnées du $4^{ème}$ sommet d'un parallélogramme



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$ (car $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$)

3.4 Points alignés ou coplanaires

Dans le plan les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$

Dans l'espace A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires

Exemples :

a) $A(-2;\ -2)$, $B(1;\ 2)$ et $C(3;\ 8)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = 18 - 8 = 10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ $\Rightarrow$ les points A, B et C ne sont pas alignés

b) $A(-1;\ 10)$, $B(2;\ 7)$ et $C(5;\ 4)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 7-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

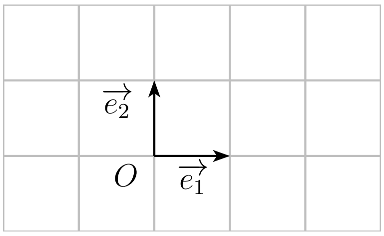
$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 = -9 + 9 = 0$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ $\Rightarrow$ les points A, B et C sont alignés

4 Norme et produit scalaire

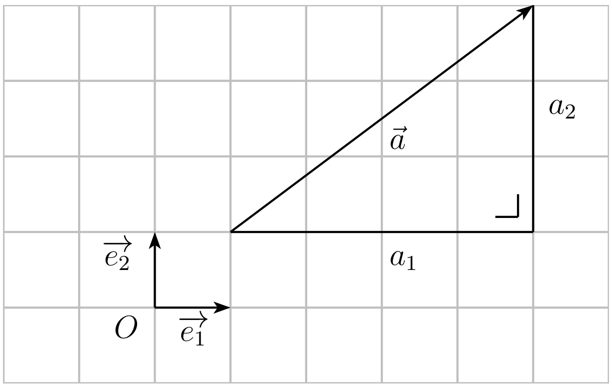
4.1 Norme d'un vecteur du plan

Définition :
Une base $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ de V_2 est **orthonormée** si les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont orthogonaux et unitaires.



Théorème
Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ un vecteur relativement à une base orthonormée $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



On applique le théorème de Pythagore !

Dans l'espace : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Exemples :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

Dans certains cas on peut utiliser la propriété suivante :

$$\|k\vec{a}\| = |k| \, \|\vec{a}\|$$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ -70 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{c}\| = 10\sqrt{1^2 + (-7)^2} = 10\sqrt{50} = 10\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 50\sqrt{2}$

Comme $\|\vec{a}\|$ représente la longueur du vecteur $\vec{a}$, la norme a les propriétés suivantes :

a) $\|\vec{a}\| \geq 0$

b) $\|\vec{a}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$

c) $\|-\vec{a}\| = \|\vec{a}\|$

d) $\|k \cdot \vec{a}\| = |k| \cdot \|\vec{a}\|$

e) $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|$ (inégalité triangulaire)

f) un vecteur $\vec{a}$ pour lequel la norme $\|\vec{a}\| = 1$ est qualifié de vecteur unitaire

4.2 Vecteur unitaire

Pour tout vecteur $\vec{a}$ non nul, le vecteur $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ est unitaire, de même direction et de même sens que le vecteur $\vec{a}$.

Exemples :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{a}\| = 13 \qquad \vec{u} = \dfrac{1}{13}\vec{a} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$ est unitaire

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{29} \qquad \vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}\vec{b} = \dfrac{\sqrt{29}}{29}\vec{b} = \dfrac{\sqrt{29}}{29}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est unitaire

4.3 Produit scalaire de deux vecteurs du plan

Définition :

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, noté $\vec{a} \cdot \vec{b}$, est le nombre réel :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Dans l'espace : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Exemples :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-7) + (-3) \cdot (-4) = -35 + 12 = -23$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot (-1) + (-11) \cdot 2 = -10 - 22 = -32$

Propriétés du produit scalaire

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (commutativité)

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (distributivité)

c) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

d) $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

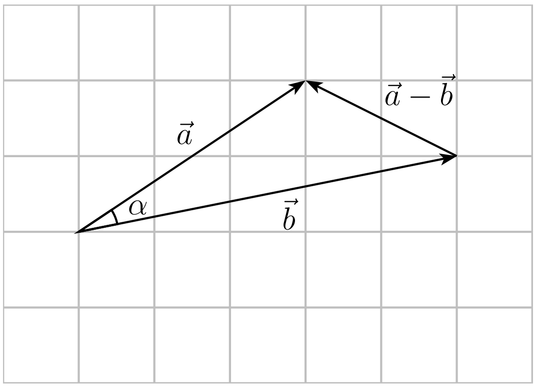
e) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

4.4 Expression trigonométrique du produit scalaire

Thèorème

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}))$$

Démonstration :



Théorème du cosinus : $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$

$\Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$

$\Rightarrow \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a}}_{\|\vec{a}\|^2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{b}}_{\|\vec{b}\|^2} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$

$\Rightarrow -2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$

Remarque : l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu, droit ou obtus si le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ est respectivement positif, nul ou négatif.

Théorème

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Exemple :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 = -12 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$

Remarque : dans le plan, le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

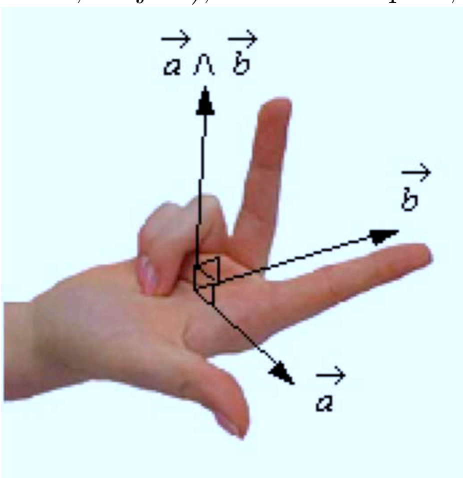
4.5 Le produit vectoriel

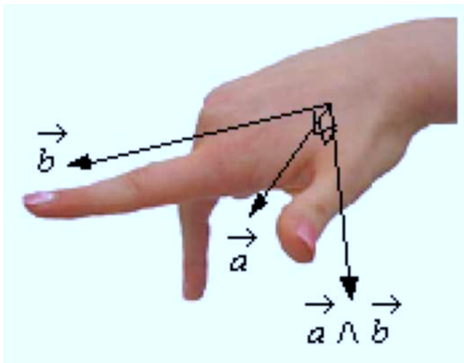
Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimensions 3. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique. Les travaux de Hermann Günter Grassmann et William Rowan Hamilton sont à l'origine du produit vectoriel défini par Gibbs.

Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angle α.

Par définition, le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$ (lire $\vec{a}$ «cross» $\vec{b}$) tel que :

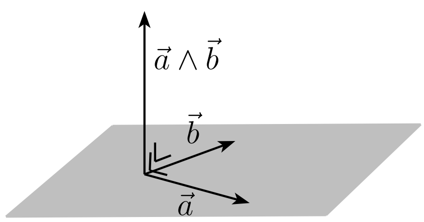
1) la direction de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonale à chacun des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
2) le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ donne au triplet $(\vec{a};\vec{b};\vec{a} \wedge \vec{b})$ une orientation directe : cette orientation est donnée par la règle du tire-bouchon ou des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur), illustrée ci-après;





3) la norme de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin(\alpha)|$$



Définition : le produit vectoriel de $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ est le vecteur

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

C'est aussi : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{e_1} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e_3} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Propriétés du produit vectoriel

1) $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$ (anti-commutativité)
2) $(k\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (k\vec{b}) = k\vec{a} \wedge \vec{b}$
3) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$ (distributivité)
   $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$
4) $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2$ (identité de Lagrange)
5) $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

4.6 Le produit mixte

Définition : on appelle produit mixte de trois vecteurs dans l'espace $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, pris dans cet ordre, le nombre réel noté $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$ défini par

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

Comme $\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$, on a aussi la relation suivante :

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Propriétés du produit mixte

1) $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] =$ volume signé du parallélépipède construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
2) $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont coplanaires.
3) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$
4) Un produit mixte est invariant dans une permutation circulaire de ses vecteurs :

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = [\vec{c}; \vec{a}; \vec{b}] = [\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}]$$

5) Un produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs :

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = -[\vec{b}; \vec{a}; \vec{c}] = -[\vec{a}; \vec{c}; \vec{b}]$$