1M14 – Mardi 5 novembre 2024 Nom & prénom : ....

Géométrie I – TE 820A

Problème	1	2	3	4	5	6	**Total**
Points	6	5	3	5	3	9	31
Points obtenus							

Problème 1 (4 points)

Les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = 2 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b} + \vec{c}$.

b) Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ forment-ils une base de V_3 ?

a) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}$ 1

b) $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ forment une base si $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 16 \\ 3 & -1 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -36 + 144 + 14 - 84 + 16 - 54 = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ ne forment pas une base. 3

Problème 2 (6 points)
On se donne quatre points dans l'espace:

$$A(0;2;4) \quad B(1;-1;3) \quad C(-8;2;1) \quad D(-6;-4;-1)$$

a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

b) Montrer qu'il existe des nombres non nuls k et ℓ tels que

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} + \ell \cdot \overrightarrow{AD}$$

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$ 3

b) $\begin{cases} 1 = -8k - 6\ell \\ -3 = -6\ell \\ -1 = -3k - 5\ell \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -8k - 3 \\ \ell = 1/2 \\ -1 = -3k - 5\ell \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -8k = 4 \\ \ell = 1/2 \\ -1 = -3k - 5\ell \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1/2 \\ \ell = 1/2 \\ -1 \overset{?}{=} \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 \checkmark \end{cases}$ 3

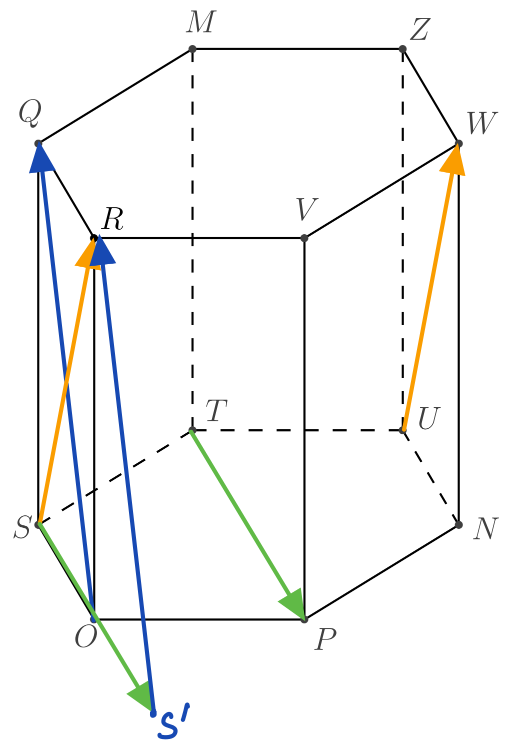
<u>Preuve:</u>

$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$

Problème 3 (3 points)
On considère ci-dessous un prisme droit dont les bases sont des hexagones réguliers. Les vecteurs

$$\overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{TP} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{UW}$$

sont ils coplanaires? Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.



$\overrightarrow{UW} = \overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{TP} = 2\,\overrightarrow{SO}$

Ces trois vecteurs peuvent être représentés dans la face OSQR.

On a $\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{UW}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{TP}$ et $\overrightarrow{UW}$ sont coplanaires.

Problème 4 (3 points)
Soit les deux points $A(5; 2; -3)$ et $B(-4; 8; 1)$.

Calculer les coordonnées du point P situé au tiers du segment AB à partir de A.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \underline{P\left(2; 4; -\frac{5}{3}\right)}$

Problème 5 (3 points)

On donne deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y-2 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ z+1 \end{pmatrix}$ de V_3.

Déterminer les nombres y et z pour que les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient colinéaires.

$\vec{b} = -2\,\vec{a}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2(y-2) \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 12 = -2y+4 \\ z+1 = -20 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \underline{y = -4}$

$\Rightarrow \quad \underline{z = -21}$

Problème 6 (6 points)

Soit $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\overrightarrow{c};\overrightarrow{d}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les composantes de $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$:

$$\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donner les composantes de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{c} + y\overrightarrow{d}$

$$\begin{cases} 0 = x - y \\ -1 = -x - y \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \cdot 1 & 1 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2y \\ 1 = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{B'}$$

$\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{c} + y\overrightarrow{d}$

$$\begin{cases} 3 = x - y \\ 0 = -x - y \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \cdot 1 & 1 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 3 = -2y \\ 3 = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -3/2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}_{B'}$$