1M14 – Mardi 5 novembre 2024 Nom & prénom : ....

Géométrie I – TE 820B

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	4	6	3	3	3	6	25
Points obtenus							

Problème 1 (4 points)

Les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = 2 \cdot \vec{a} -3 \cdot \vec{b} + \vec{c}$.

b) Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ forment-ils une base de V_3 ?

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ forment une base si $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 16 \\ 2 & -1 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -144 + 96 - 14 - 56 + 64 + 54 = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ ne forment pas une base.

Problème 2 (6 points)
On se donne quatre points dans l'espace:

$$A(0;2;4) \quad B(1;-1;3) \quad C(-6;-4;-1) \quad D(-8;2;1)$$

a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

b) Montrer qu'il existe des nombres non nuls r et s tels que

$$\overrightarrow{AB} = r \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD}$$

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} 1 = -6r - 8s \\ -3 = -6r \\ -1 = -5r - 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ 8s = -1 - 6r = -4 \\ -1 = -5r - 3s \end{cases}$

$\begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ s = -\frac{1}{2} \\ -1 \overset{?}{=} -5 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2} = -1 \checkmark \end{cases}$

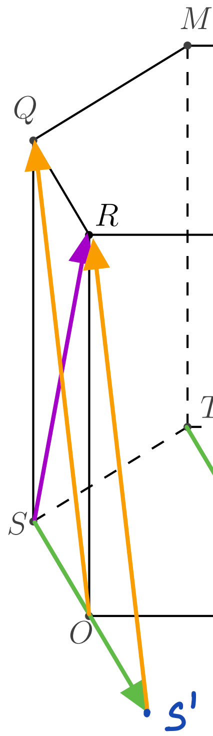
Preuve :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problème 3 (3 points)
On considère ci-dessous un prisme droit dont les bases sont des hexagones réguliers. Les vecteurs

$$\overrightarrow{NZ}, \quad \overrightarrow{TP} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SR}$$

sont ils coplanaires? Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.



$\overrightarrow{NZ} = \overrightarrow{OQ}$; $\overrightarrow{TP} = 2\,\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SS'}$

$\overrightarrow{SS'} + \overrightarrow{S'R} = \overrightarrow{SR} \iff \overrightarrow{NZ} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{SR}$

Les vecteurs $\overrightarrow{NZ}$, $\overrightarrow{TP}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont coplanaires.

Problème 4 (3 points)
Soit les deux points $M(3; 1; -5)$ et $N(-6; 10; -1)$.

Calculer les coordonnées du point A situé au tiers du segment MN à partir de M.

$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -11/3 \end{pmatrix}$

$A\left(0; 4; \frac{-11}{3}\right)$

Problème 5 (3 points)

On donne deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y+2 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ z-3 \end{pmatrix}$ de V_3.

Déterminer les nombres y et z pour que les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient colinéaires.

$-2\vec{a} = \vec{b}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2(y+2) = 12 & \Rightarrow -2y - 4 = 12 \Rightarrow y = -8 \\ -20 = z - 3 & \Rightarrow z = -17 \end{cases}$

Problème 6 (6 points)

Soit $\mathfrak{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\vec{c}; \vec{d}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les composantes de $\vec{c}$ et $\vec{d}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donner les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

$\vec{a} = x\vec{c} + y\vec{d}$

$$\begin{cases} 0 = x - y \\ -1 = -x - y \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} -1 = -2y \\ 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{B'}$$

$\vec{b} = x\vec{c} + y\vec{d}$

$$\begin{array}{l} 3 = x - y \\ 0 = -x - y \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 3 = -2y \\ 3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}_{B'}$$