03.10.24

1.3.2 Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k \\ 5k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ -10 = m+4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -14$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$

Deux vecteurs sont colinéaires si

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$\begin{cases} ka = c \\ kb = d \end{cases} \Leftrightarrow ka \cdot d = c \cdot kb$

$\Leftrightarrow \cancel{k} \cdot ad = \cancel{k} \cdot bc$

$\Leftrightarrow ad = bc$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow ad - bc = 0}$$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \overset{?}{\parallel} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ $(-3) \cdot (-8) - 6 \cdot 4 = 24 - 24 = 0$

b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow m(m-1) - 3(m+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 3m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-6)(m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 6 \text{ ou } m = -2$$

deux solutions : $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

<u>Définition</u>

$$\left| \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{\text{matrice}} \right| = ad - bc$$ est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

1.3.3 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels quel $\vec{x} + \lambda \vec{b} = \vec{c}$

λ : lambda

- $\vec{x} \parallel \vec{a} \iff \vec{x} = K \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 7K \\ -2K \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 7K \\ -2K \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} 7K \\ -2K \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix}}_{\text{colinéaire à } \vec{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 7K - 3\lambda = 0 & \cdot 2 \quad (1) \\ -2K + 5\lambda = 5 & \cdot 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cdot 5 \quad (2) \\ \cdot 3 \end{cases}$$

(1)
$$\begin{aligned} 14K - 6\lambda &= 0 \\ -14K + 35\lambda &= 35 \\ \hline 29\lambda &= 35 \quad \Big| \div 29 \\ \lambda &= \frac{35}{29} \end{aligned}$$

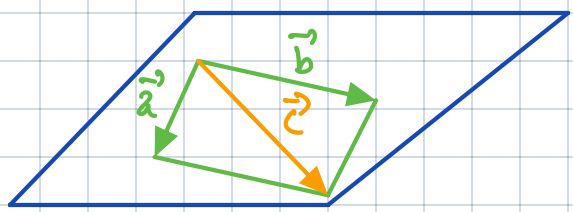
(2)
$$\begin{aligned} 35K - 15\lambda &= 0 \\ -6K + 15\lambda &= 15 \\ \hline 29K &= 15 \\ K &= \frac{15}{29} \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda = \dfrac{35}{29}$.

Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs de V_3 sont coplanaires si on peut exprimer l'un des trois comme combinaison linéaire des deux autres.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ il existe α et β des nombres réels tels que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.



1.3.4 Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

Déterminons un critère qui permet de déterminer si trois vecteurs sont coplanaires.

a) $1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 13 \\ \beta = 2 \\ -\alpha + 4\beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ -1 + 8 = 7 \checkmark \end{cases}$$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ -x + 2y = -11 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ 15 - 12 = 3 \times \text{ Faux} \end{cases}$$

Ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = -4 \\ 3\alpha + \beta = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \beta \\ \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha = 0 \\ 2\alpha - \beta = 2 \\ 3\alpha + \beta = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2 \\ 3 \cdot 0 + (-2) = -2 \ \checkmark \end{cases}$$

Le premier est colinéaire au troisième, ils sont donc coplanaires.

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\cdot 3 \downarrow \qquad \downarrow \cdot 4 \qquad \downarrow \cdot 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{c}}$$

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 10 & \\ 2x - 3y = -4 & \cdot 1 \\ -x + 4y = 1 & \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} (1) \\ \\ \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{array}$$

(1) $2x - 3y = -4$

$-2x + 8y = 2$

$5y = -2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 5y = -2 \\ 5x = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-39}{5} + \frac{-4}{5} = -\frac{43}{5} \neq 10 \\ y = -\frac{2}{5} \\ x = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

Ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Déterminant d'ordre 3

2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{matrix}$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

$= (3 \cdot 1 \cdot 7) + (5 \cdot 2 \cdot (-1)) + (13 \cdot 0 \cdot 4)$

$- (13 \cdot 1 \cdot (-1)) - (3 \cdot 2 \cdot 4) - (5 \cdot 0 \cdot 7)$

Règle de Sarrus

$= 21 - 10 + 0 + 13 - 24 - 0 = 0$

$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires

Idée de la démonstration

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & xa_1 + yb_1 \\ a_2 & b_2 & xa_2 + yb_2 \\ a_3 & b_3 & xa_3 + yb_3 \end{vmatrix} = 0$$