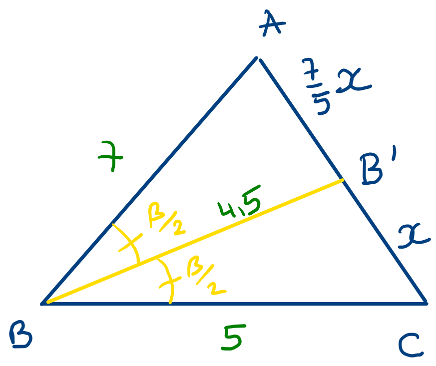
4.4.20 Calculer le côté et les angles inconnus d'un triangle ABC, connaissant $a = 5$, $c = 7$ et sachant que la longueur de la bissectrice issue de B est égale 4.5.



<u>Théorème de la bissectrice</u> : $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{CB}{CB'}$

$$\frac{7}{AB'} = \frac{5}{CB'} \iff 5 \cdot AB' = 7 \cdot CB'$$
$$AB' = \frac{7}{5} \cdot CB'$$

Posons $CB' = x$, alors $AB' = \frac{7}{5}x$.

On utilise deux fois le théorème du cosinus :

$\triangle ABB'$: $\left(\frac{7}{5}x\right)^2 = 7^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4{,}5 \cdot \cos\left(\frac{B}{2}\right)$

$\triangle CBB'$: $x^2 = 5^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4{,}5 \cdot \cos\left(\frac{B}{2}\right)$

On résout le système :

$$\begin{cases} \frac{49x^2}{25} = 69{,}25 - 63 \cdot \cos\left(\frac{B}{2}\right) \\ x^2 = 45{,}25 - 45 \cos\left(\frac{B}{2}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} 1{,}96\, x^2 = 69{,}25 - 63 \cdot \cos\left(\frac{B}{2}\right) \\ x^2 = 45{,}25 - 45 \cos\left(\frac{B}{2}\right) \end{cases} \Bigg| \cdot(-1{,}96)$$

$$\iff \begin{cases} 1{,}96\, x^2 = 69{,}25 - 63 \cdot \cos\left(\frac{B}{2}\right) \\ -1{,}96 x^2 = -88{,}69 + 88{,}2 \cos\left(\frac{B}{2}\right) \end{cases}$$
$$0 = -19{,}44 + 25{,}2 \cos\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{19{,}44}{25{,}2} \cong 0.771428571428571$$

$$\Rightarrow \frac{B}{2} \cong 39{,}52° \Rightarrow \underline{B = 79{,}04°}$$