18.12.24

Systèmes d'equations linéaires

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ \quad\;\; y - z = -4 \\ \qquad\quad\; z = 1 \end{cases}$$

On représente ce système avec un tableau, appelé matrice :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est la matrice augmentée du système.

On a aussi la matrice des coefficients du système : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Résolvons ce système : pour cela, j'ai le droit d'effectuer les opérations élémentaires suivantes :

1) Remplacer une ligne par sa somme avec le multiple d'une autre ligne
2) Echanger deux lignes
3) Multiplier tous les éléments d'une ligne par un nombre non nul

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{}$ pivot

matrice échelonnée réduite

Réduire le système :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -7 & 8 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 7L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 29 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 16 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 29 \\ y = 16 \\ z = 3 \end{cases}$$

2.5.21 Résoudre les systèmes linéaires ci-dessous :

g) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 41 \\ 8x + 5y = 31 \\ 7y = 21 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 41 \\ 8 & 5 & 0 & 31 \\ 0 & 7 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$