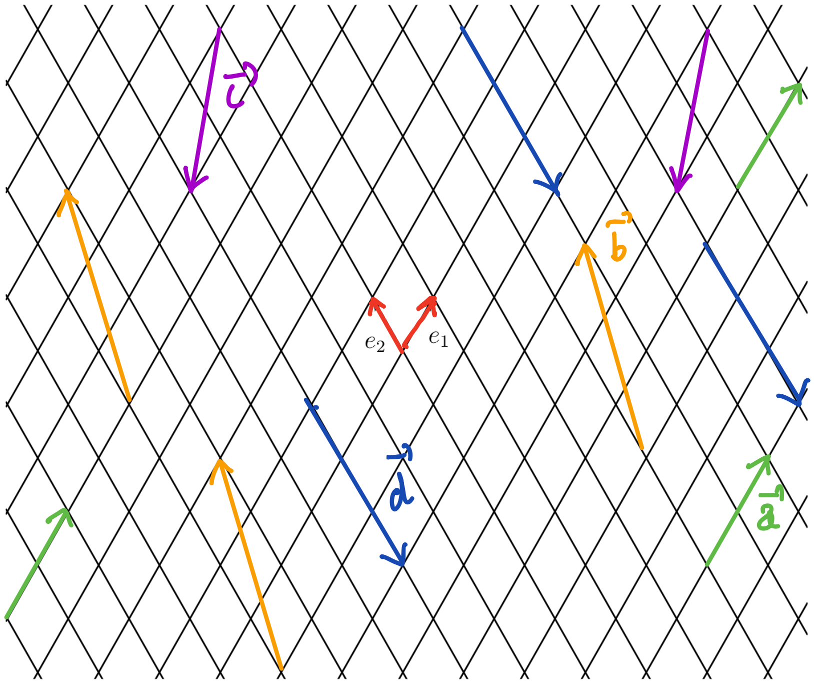
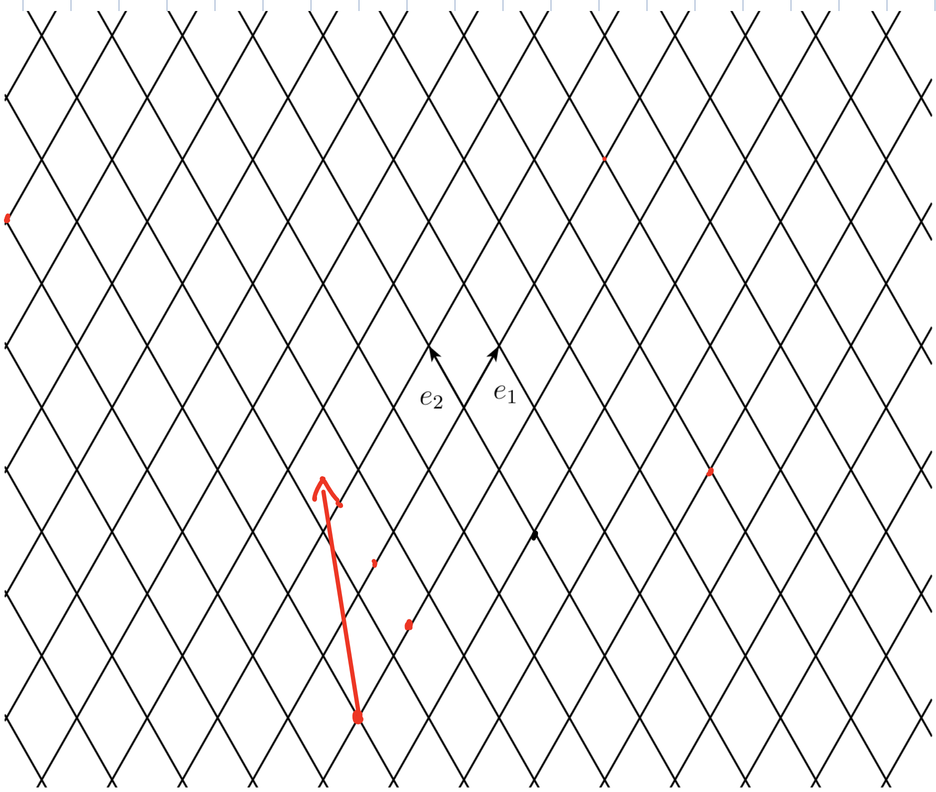
1.2.7 On considère la figure suivante





$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $3\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$ et donner leurs composantes dans $\mathfrak{B}$.

$$\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-2) \\ 3 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{b} + 2\vec{c} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Règles de calcul dans V_2

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

1.2.8, 1.2.9 et 1.2.11

1.2.9 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Calculer les nombres k et m tels que $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{c}$.

$$k \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2k \\ 4k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3m \\ -9m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2k + 3m \\ 4k - 9m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k + 3m = 12 \\ 4k - 9m = -6 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} k \; ① & m \; ② \\ \cdot 2 & \cdot 3 \\ \cdot(-1) & \cdot 1 \end{array}$$

①
$$\begin{array}{rl} 4k + 6m &= 24 \\ -4k + 9m &= 6 \\ \hline 15m &= 30 \quad \Big| \div 15 \\ \underline{m = 2} & \end{array}$$

②
$$\begin{array}{rl} 6k + 9m &= 36 \\ 4k - 9m &= -6 \\ \hline 10k &= 30 \\ \underline{k = 3} & \end{array}$$

Dans la base $\mathfrak{B} = (\vec{a}, \vec{b})$, le vecteur $\vec{c}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.2.11 Soit $\mathfrak{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = (\vec{a}; \vec{b})$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

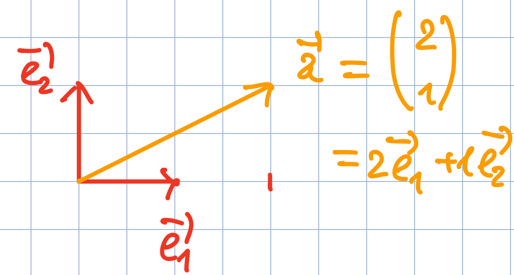
b) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$

Base et composantes numériques

$$B = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$$



$$\vec{a} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{e_1} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_2} = 0\,\vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans $B' = (\vec{a}, \vec{b})$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B'}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{B'}$$

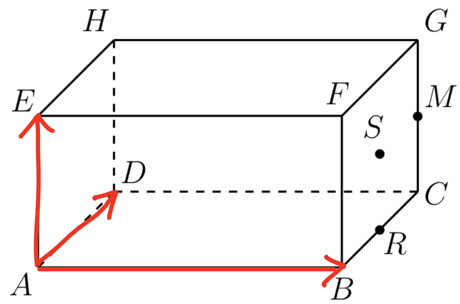
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'}$$

1.2.12 On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$ et S est le centre de la face $BCGF$.



a) Donner, relativement à la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$ les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AR},\ \overrightarrow{AK}.$$

$$\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot 0\, \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1.2.14 Exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $$x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} 1\ x \\ \cdot 3 \\ \cdot(-2) \\ \end{array}$$

$$1 \quad \begin{array}{r} 6x + 9y = 33 \\ -6x + 2z = -2 \\ \hline 9y + 2z = 31 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} 9y + 2z = 31 \\ -y + 2z = 1 \end{array}} \\ 2x + 3y = 11 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} z \\ \cdot 1 \\ \cdot(-1) \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 30 \\ -y + 2z = 1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ -3 + 2z = 1 \\ 2x + 9 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2z = 4 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c} = \vec{v}}$$

TE mardi 5.11.24