1.3.11 31.10.24

1.3.11 Les points M, N et P suivants sont-ils alignés ?

$$M(13;-22;2) \qquad N(-5;-10;26) \qquad P(-38;12;60)$$

Dim 2 : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff ad - bc = 0$

Dim 3 : M, N, P alignés $\iff \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{MP}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -38 \\ 12 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 \\ 34 \\ 58 \end{pmatrix} = 17 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 58/17 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MN}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{MP}$. Donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

1.3.12 Déterminer dans chaque cas la constante k pour les points A, B et C soient alignés :

a) $A(1;2)$, $B(-3;3)$ et $C(k;1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} K \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \iff \begin{vmatrix} -4 & K-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 1\cdot(K-1) = 0 \quad \Leftrightarrow 4 - K + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{K = 5}$$

1.3.13 On donne trois points A, B et C. Déterminer, dans les cas suivants, le nombre réel α pour qu'ils soient alignés :

a) $A(2;3;5)$, $\qquad B(3;5;8)$, $\qquad C(5;9;\alpha)$.

b) $A(\alpha;-3;-4)$, $\qquad B(3;1;0)$, $\qquad C(0;\alpha+2;\alpha+1)$.

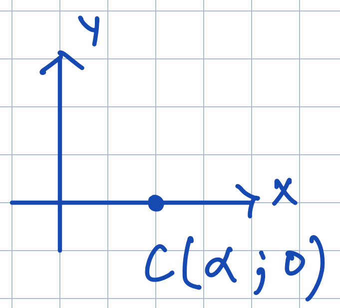
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ \alpha-5 \end{pmatrix} \qquad 3\cdot\vec{AB} = \vec{AC}$$

$$\Rightarrow 9 = \alpha - 5 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 14}$$

1.3.14 On donne $A(7;-3)$ et $B(23;-6)$. Déterminer le point C de l'axe Ox qui est aligné avec A et B.

C est sur l'axe Ox, donc $C(\alpha;0)$



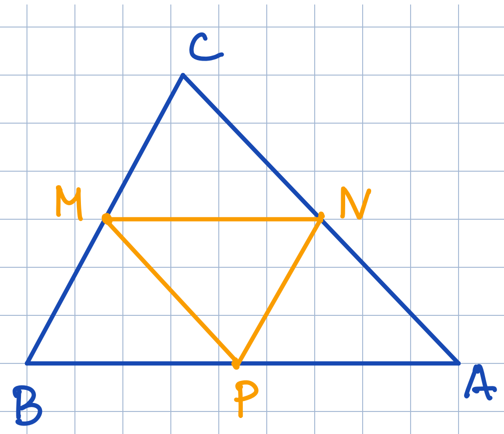
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 23 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \parallel \vec{AC} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 16 & \alpha-7 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 48 + 3(\alpha-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 48 + 3\alpha - 21 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = -27 \Leftrightarrow \underline{\alpha = -9}$$

1.3.18 Les points $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PA}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A(-5;7)$$