1M7 – 19 décembre 2025 Nom & prénom : . . . .

Algèbre 1 — TE 845A

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	5	9	5	4	4	6	33
Points obtenus							

Formulaire — Produits remarquables

$(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$ $\quad$ $(A-B)^2 = A^2 - 2\,AB + B^2$

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ $\quad$ $A^2 + B^2$ n'est pas factorisable

$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2\,AB + 2\,AC + 2\,BC$

$(A+B)^3 = A^3 + 3\,A^2B + 3\,AB^2 + B^3$ $\quad$ $(A-B)^3 = A^3 - 3\,A^2B + 3\,AB^2 - B^3$

$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$ $\quad$ $(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$

Problème 1 (5 points)
Réduire au maximum.

a) $(3\,a - 2\,b)^2$

b) $(5\,m\,x^2 + 2\,y^3)^2$

c) $(7\,z^4 - 18)\,(7\,z^4 + 18)$

d) $(2\,x^2 - 5)^3$

a) $9a^2 - 12ab + 4b^2$

b) $25m^2x^4 + 20mx^2y^3 + 4y^6$

c) $49z^8 - 324$

d) $(2x^2)^3 - 3(2x^2)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x^2 \cdot 5^2 - 5^3$

$= 8x^6 - 60x^4 + 150x^2 - 125$

Problème 2 (9 points)

Effectuer et réduire :

a) $(4\,a^2 - 5)\,(3\,a^2 + 8) - (12\,a^3 - 1)\,(a + 12)$

b) $(3\,x - 4)^2 - (4\,x - 3)^2 - 5\,(2\,x - 4)\,(2\,x + 4)$

c) $(x^3 - x^2 - x + 1)\,(x^3 - x^2 + x - 1)$

a) $12a^4 + 17a^2 - 40 - (12a^4 + 144a^3 - a - 12)$

$= -144a^3 + 17a^2 + a - 28$

b) $9x^2 - 24x + 16 - 16x^2 + 24x - 9 - 20x^2 + 80$

$= -27x^2 + 87$

c)

	x^3	$-x^2$	$-x$	1
x^3	x^6	$-x^5$	$-x^4$	x^3
$-x^2$	$-x^5$	x^4	x^3	$-x^2$
x	x^4	$-x^3$	$-x^2$	x
-1	$-x^3$	x^2	x	-1

$= x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1$

Problème 3 (5 points)
Déterminer un polynôme p satisfaisant les conditions suivantes :

1) • p est unitaire de degré 4 (le coefficient de x^4 est égal à 1)
2) • p est divisible par $x + 4$
3) • $p(0) = 40$
4) • 2 est un zéro de p
5) • la division de p par $x - 1$ donne un reste égal à 40.

2)+4) $p = (x+4)(x-2)(\underbrace{x^2}_{1)}+ax+b)$

3) $p(0) = 4 \cdot (-2) \cdot b = 40 \Rightarrow -8b = 40 \Rightarrow b = -5$

5) $p(1) = 40 \Rightarrow 5 \cdot (-1)(1+a-5) = 40$

$\Rightarrow a-4 = -8$

$a = -4$

$\Rightarrow$ $\underline{p = (x+4)(x-2)(x^2-4x-5)}$

Problème 4 (4 points)
Factoriser selon le modèle :

$$6x^2 + 11x - 10 = (3x-2)(2x+5)$$

a) $4x^2 + 13x - 12 =$ $(4x-3)(x+4)$

b) $2x^2 - 5x - 3 =$ $(2x+1)(x-3)$

c) $5x^2 - 8x + 3 =$ $(5x-3)(x-1)$

d) $15x^2 + x - 6 =$ $(3x+2)(5x-3)$

Problème 5 (4 points)
Effectuer la division euclidienne du polynôme D par le polynôme d .

$$D = 3\,x^5 + 4\,x^4 + 1 \quad , \quad d = x^2 + 2\,x + 3$$

Écrire ensuite l'égalité fondamentale.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^5 + 4x^4 \;\dots\;\dots\;\dots\; + 1 & x^2 + 2x + 3 \\
\cline{3-3}
- & 3x^5 + 6x^4 + 9x^3 & \underbrace{3x^3 - 2x^2 - 5x + 16}_{q} \\
\cline{2-2}
 & -2x^4 - 9x^3 & \\
- & -2x^4 - 4x^3 - 6x^2 & \\
\cline{2-2}
 & -5x^3 + 6x^2 & \\
- & -5x^3 - 10x^2 - 15x & \\
\cline{2-2}
 & 16x^2 + 15x + 1 & \\
- & 16x^2 + 32x + 48 & \\
\cline{2-2}
 & r = -17x - 47 &
\end{array}
$$

$$D = q \cdot d + r$$

Problème 6 (6 points)
Factoriser entièrement le polynôme $a = 2x^4 - x^3 - 12x^2 - 7x - 6$.

- $a(-2) = 32 + 8 - 48 + 14 - 6 = 0 \Rightarrow (x+2) \mid a$

	2	-1	-12	-7	-6
-2		-4	10	4	6
	2	-5	-2	-3	0

- $a = (x+2)(\underbrace{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}_{a_1})$

- $a_1(3) = 54 - 45 - 6 - 3 = 0 \Rightarrow (x-3) \mid a_1$

	2	-5	-2	-3
3		6	3	-3
	2	1	1	0

- $a = (x+2)(x-3)(\underbrace{2x^2 + x + 1}_{})$

$\Delta = 1 - 8 < 0$
pas factorisable

$a = (x+2)(x-3)(2x^2 + x + 1)$