

Trigonométrie – TE 852A

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	8	10	4	4	7	4	37
Points obtenus							

Problème 1 (8 points)

Résoudre les deux équations trigonométriques suivantes. Donner les solutions en radians.

a) $\cos(3x) = \sin(x)$

b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a) \quad \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$1) \quad 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

$$2) \quad 3x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

 $k \in \mathbb{Z}$

$$b) \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$1) \quad 3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad 3x + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Problème 2 (10 points)

Résoudre les équations suivantes. Donner les solutions en radians.

a) $2 \sin^2(x) - 3 \sin(x) + 1 = 0$

b) $12 \cos^2(x) - 8 \sin^2(x) = 2$

a) Posons $y = \sin(x)$

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y - 1) = 0$$

(i) $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{711} \quad x = 30^\circ$

$$x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{ou} \quad x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

(ii) $y = 1 \Rightarrow \sin(x) = 1$

$$x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

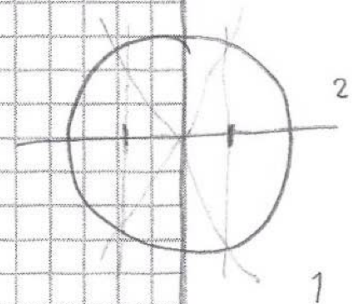
Sol: $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$

b) $12 \cos^2(x) - 8 \sin^2(x) - 2 = 0$

$$6 \cos^2(x) - 4(1 - \cos^2(x)) - 1 = 0$$

$$10 \cos^2(x) - 5 = 0$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



solution: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

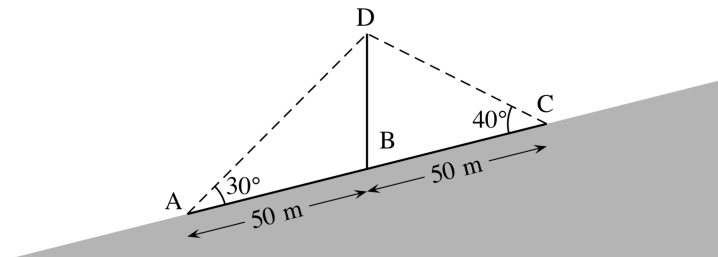
Problème 3 (4 points)

A l'aide des *valeurs exactes des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers* (page 30 du formulaire), calculer la valeur **exacte** de $\sin(75^\circ)$.

$$\begin{aligned}\sin(75^\circ) &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin(45^\circ) \cdot \cos(30^\circ) + \sin(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Problème 4 (4 points)

Un mât, situé au flanc d'une colline, est retenu par deux câbles comme sur la figure. Les points d'ancrage des câbles (A et C) sont situés à 50 mètres de part et d'autre du pied du mât (point B). Le câble aval AD forme un angle de 30° avec la colline tandis que le câble amont CD forme un angle de 40° avec la colline.



Quelle est la hauteur du mât BD ?

• $\hat{ADC} \cong 110^\circ$

• $\frac{AD}{\sin(40^\circ)} = \frac{100}{\sin(110^\circ)} \Rightarrow AD = \frac{\sin(40^\circ)}{\sin(110^\circ)} \cdot 100 \cong 68,40 \text{ m}$

• $BD^2 \cong 68,40^2 + 50^2 - 2 \cdot 68,40 \cdot 50 \cdot \cos(30^\circ)$

$\cong 1254,94$

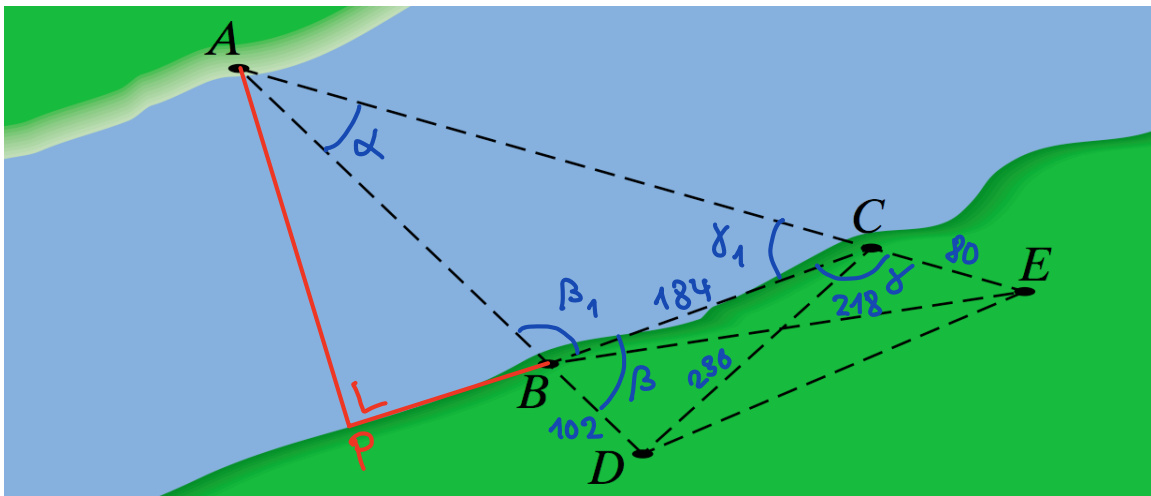
$BD \cong 35,43 \text{ m}$

Problème 5 (7 points)

On peut calculer la largeur d'un fleuve sans avoir à mesurer d'angle. Comme le montre la figure, on choisit un point A sur une rive et deux points B et C sur la rive opposée. Les segments de droite AB et AC sont étendus jusqu'aux points D et E (voir figure). Puis on mesure les distances BC , BD , BE , CD et CE . Supposons que les distances sont

$$BC = 184 \text{ m}, \quad BD = 102 \text{ m}, \quad BE = 218 \text{ m}, \quad CD = 236 \text{ m}, \quad \text{et} \quad CE = 80 \text{ m}.$$

- Calculer les distances AC et AB .
- Calculer, à partir du point A , la plus courte distance au travers du fleuve.



2) $\widehat{CBD} = \cos^{-1} \left(\frac{184^2 + 102^2 - 236^2}{2 \cdot 184 \cdot 102} \right) \cong 107,74^\circ = \beta$ 1

$\widehat{BCE} = \cos^{-1} \left(\frac{184^2 + 80^2 - 218^2}{2 \cdot 184 \cdot 80} \right) \cong 104,29^\circ = \gamma$ 1

$\Rightarrow \widehat{ABC} \cong 72,26^\circ = \alpha$, et $\widehat{ACB} \cong 75,71^\circ = \alpha_1$, $\widehat{BAC} \cong 32,03^\circ = \alpha$ 1

Donc $AC \cong \frac{184}{\sin(32,03^\circ)} \cdot \sin(72,26^\circ) \cong 330,44 \text{ [m]}$ 1

$AB \cong \frac{184}{\sin(32,03^\circ)} \cdot \sin(75,71^\circ) \cong 336,20 \text{ [m]}$ 1

b) APB rectangle en P $AP = 336,20 \sin(72,26^\circ)$

$\cong 320,22 \text{ [m]}$ 2

Problème 6 (4 points)

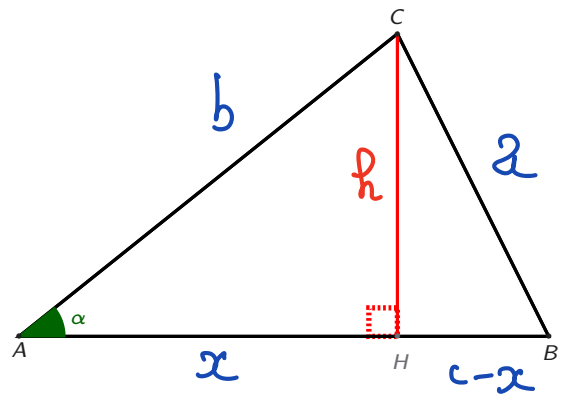
Le triangle ABC , représenté à droite, n'a pas d'angle obtu.

Soit $\alpha = \widehat{BAC}$. Soit H le pied de la hauteur issue de C sur le côté AB .

On pose $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ et $CH = h$.

Démontrer, dans ce cas précis, le théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$



Posons $AH = x$, donc $HB = c - x$

• $\cos(\alpha) = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos(\alpha)$

• Par Pythagore :

$$\begin{cases} h^2 = b^2 - x^2 \\ h^2 = a^2 - (c-x)^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2 \end{cases}$$

Donc ~~$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$~~

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2c b \cos(\alpha)}$$