1M7 – Vendredi 27 mars 2026 Nom & prénom : ....

Trigonométrie – TE 852B

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	8	10	4	4	7	4	37
Points obtenus							

Problème 1 (8 points)

Résoudre les deux équations trigonométriques suivantes. Donner les solutions en radians.

a) $\cos(4x) = \sin(x)$

b) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $\cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

1) $4x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$

$5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \underline{x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}}, \quad k \in \mathbb{Z}$

2) $4x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \underline{x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

1) $2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$2x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) $$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Problème 2 (10 points)

Résoudre les équations suivantes. Donner les solutions en radians.

a) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$ b) $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$

a) Posons $y = \sin(x)$

$2y^2 - 3y + 1 = 0$

$(2y-1)(y-1) = 0$ 1

(i) $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{T|} \; x = 30^\circ$

$x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ ou $x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$ 2

(ii) $y = 1 \Rightarrow \sin(x) = 1$

$x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ 2

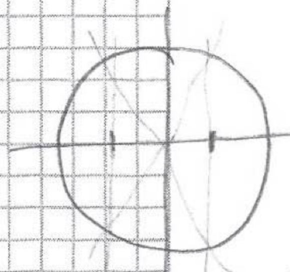
sol: $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$, $x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, $x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$

b) $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) - 2 = 0$

$6\cos^2(x) - 4(1 - \cos^2(x)) - 1 = 0$ 2

$10\cos^2(x) - 5 = 0$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2



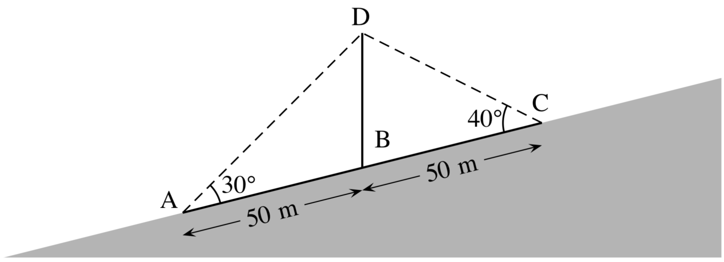
solution: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ 1

Problème 3 (4 points)
A l'aide des *valeurs exactes des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers* (page 30 du formulaire), calculer la valeur **exacte** de $\cos(75°)$.

$$\cos(75°) = \cos(45° + 30°)$$
$$= \cos(45°) \cdot \cos(30°) - \sin(45°) \cdot \sin(30°)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Problème 4 (4 points)

Un mât, situé au flanc d'une colline, est retenu par deux câbles comme sur la figure. Les points d'ancrage des câbles (A et C) sont situés à 50 mètres de part et d'autre du pied du mât (point B). Le câble aval AD forme un angle de 30° avec la colline tandis que le câble amont CD forme un angle de 40° avec la colline.



Quelle est la hauteur du mât BD ?

- $\widehat{ADC} \cong 110°$

- $\dfrac{AD}{\sin(40°)} = \dfrac{100}{\sin(110°)} \Rightarrow AD = \dfrac{\sin(40°)}{\sin(110°)} 100 \cong 68{,}40$ m

- $BD^2 \cong 68{,}40^2 + 50^2 - 2 \cdot 68{,}40 \cdot 50 \cdot \cos(30°)$

  $\cong 1254{,}94$

$BD \cong 35{,}43$ m

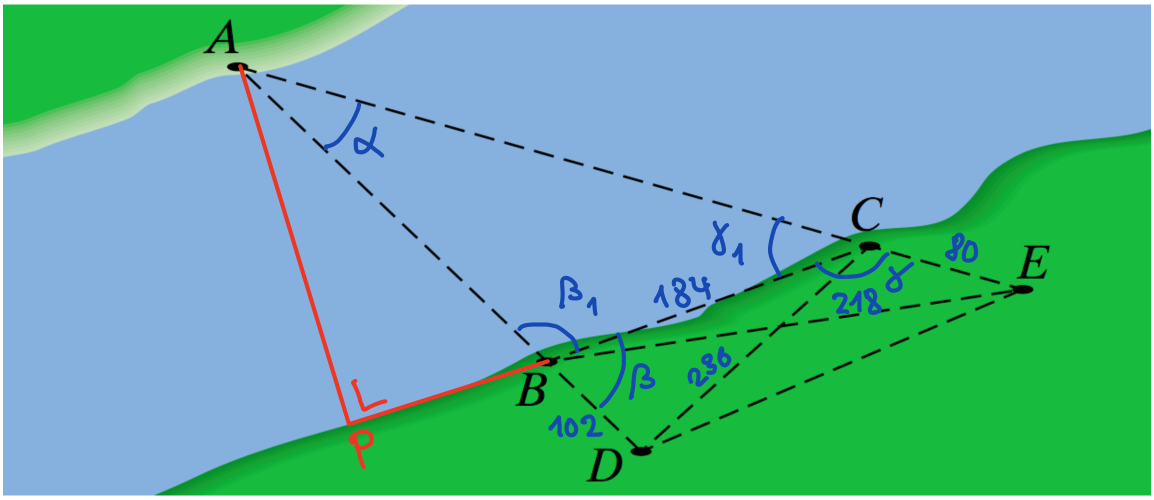
Problème 5 (7 points)

On peut calculer la largeur d'un fleuve sans avoir à mesurer d'angle. Comme le montre la figure, on choisit un point A sur une rive et deux points B et C sur la rive opposée. Les segments de droite AB et AC sont étendus jusqu'aux points D et E (voir figure). Puis on mesure les distances BC, BD, BE, CD et CE. Supposons que les distances sont

$$BC = 184 \text{ m}, \quad BD = 102 \text{ m}, \quad BE = 218 \text{ m}, \quad CD = 236 \text{ m}, \quad \text{et} \quad CE = 80 \text{ m}.$$

a) Calculer les distances AC et AB.

b) Calculer, à partir du point A, la plus courte distance au travers du fleuve.



a) $\widehat{CBD} = \cos^{-1}\left(\frac{184^2+102^2-236^2}{2\cdot 184\cdot 102}\right) \cong 107,74° = \beta$ 1

$\widehat{BCE} = \cos^{-1}\left(\frac{184^2+80^2-218^2}{2\cdot 184\cdot 80}\right) \cong 104,29° = \gamma$ 1

$\Rightarrow \widehat{ABC} \cong 72,26° = \beta_1$ et $\widehat{ACB} \cong 75,71° = \gamma_1$, $\widehat{BAC} \cong 32,03° = \alpha$ 1

Donc $AC \cong \frac{184}{\sin(32,03°)}\cdot \sin(72,26°) \cong 330,44$ [m] 1

$AB \cong \frac{184}{\sin(32,03)} \sin(75,71°) \cong 336,20$ [m] 1

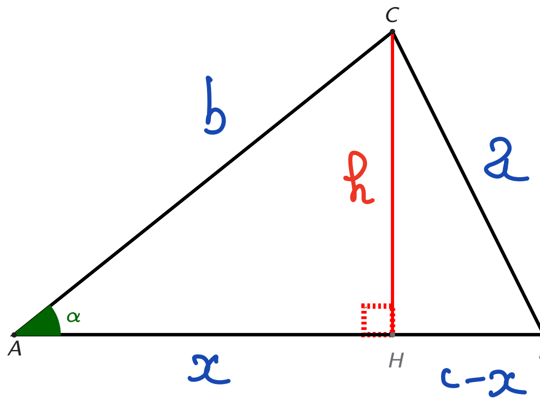
b) APB rectangle en P $\quad AP = 336.20 \sin(72,26°)$

$\cong 320.22$ [m] 2

Problème 6 (4 points)

Le triangle ABC, représenté à droite, n'a pas d'angle obtu.
Soit $\alpha = \widehat{BAC}$. Soit H le pied de la hauteur issue de C sur le côté AB.
On pose $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ et $CH = h$.
Démontrer, dans ce cas précis, le théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos(\alpha)$$



Posons $AH = x$, donc $HB = c - x$

- $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos(\alpha)$
- Par Pythagore : $\begin{cases} h^2 = b^2 - x^2 \\ h^2 = a^2 - (c-x)^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2 \end{cases}$

Donc $b^2 \cancel{- x^2} = a^2 - c^2 + 2cx \cancel{- x^2}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos(\alpha)}$$