

2.5.19 Résoudre les systèmes d'équations :

23.01.26

$$c) \begin{cases} 6x + 4 = -6y \\ 1 - x = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6y = -4 \\ -x - 6y = -1 \end{cases}$$

Matrice augmentée du système :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & -4 \\ -1 & -6 & -1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -6 & -1 \\ 6 & 6 & -4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 6L_1 \\ L_1 \leftarrow -L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 6 & 1 \\ 0 & -30 & -10 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{30} L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 6 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 6L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad S = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

Problème 1

Les matrices suivantes sont-elles sous la forme échelonnée réduite ?

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \quad N$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \textcircled{-3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 \div 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Une équation pour 2 inconnues ; donc on a 1 degré de liberté

$$x - 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 \div 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2.5 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{array} \right)$$

Le système n'a pas de solution

$$S = \emptyset$$

$$S = \left\{ (2t+1; t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Problème 2

Chacune des matrices suivantes est une matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires rationnels. Déterminez si le système n'admet aucune solution, s'il admet une solution unique ou une infinité de solutions.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

2) $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad S = \emptyset$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

$$c) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow L_1 \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problème 3

Faire la liste des matrices à coefficients réels de taille 2x2 échelonnées réduites.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5.21 Résoudre les systèmes linéaires ci-dessous :

$$\text{k)} \begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2y - 3z = 10 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 10 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & 6 & -28 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 11L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 \div (-16)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$S = \{ (3; -2; -1) \}$$

Mercredi : ex 2.5.21