Les types de démonstration

1. La démonstration directe

On part d'une hypothèse P et on montre par une suite d'implications logiques que la conclusion Q est vraie.

$$P \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$$

Exemple

Montrons que le carré d'un nombre pair est pair.

P = "n est pair" ; Q = "n^2 est pair"

$$P \Rightarrow Q$$

$P \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2\cdot(2k^2)$
$\Rightarrow n^2$ est pair $\Rightarrow Q$

2. La démonstration par l'absurde

Pour montrer que P est vraie, on suppose que P est fausse. On cherche alors une contradiction.

Exemple $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Donc il existe p et q, premiers entre eux, tels que

$$\begin{array}{rcl|l} \sqrt{2} & = & \dfrac{p}{q} & \cdot q \\ \sqrt{2}\, q & = & p & (\ )^2 \\ 2q^2 & = & p^2 & \end{array}$$

p^2 est pair $\Rightarrow$ <u>p est pair</u> $\Rightarrow p = 2p'$

$$\begin{array}{rcl|l} 2q^2 & = & (2p')^2 & \\ 2q^2 & = & 4p'^2 & \div 2 \\ q^2 & = & 2p'^2 & \end{array}$$

q^2 est pair $\Rightarrow$ <u>q est pair</u>.

p et q sont pairs. Cela contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Donc il n'existe pas p et q entiers tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

3. La démonstration par contraposée

L'implication $(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$

Au lieu de prouver le sens direct, on prouve que si la conclusion est fausse, alors l'hypothèse est nécessairement fausse.

Exemple $n \in \mathbb{N}$, n^2 est impair $\Rightarrow$ n est impair

Contraposée : n est pair $\Rightarrow$ n^2 est pair

$$n \text{ pair} \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2\cdot(2k^2) \Rightarrow n^2 \text{ pair}$$

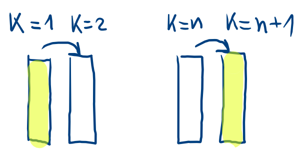
4. La démonstration par récurrence

Une propriété P est définie sur $\mathbb{N}$.

[1] **Initialisation :** on montre que la propriété est vraie pour $n = 1$.

[2] **Hérédité :** On suppose que P est vraie pour n et on démontre qu'elle est vraie pour $n+1$

[3] **Conclusion :** P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$



Montrons que $1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{K=1}^{n} K = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Démontrons ce résultat :

[1] On vérifie ce résultat pour $n = 1$.

$$1 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

[2] On suppose le résultat vrai pour n et on le $n+1$

Je dois demontrer que $\displaystyle\sum_{K=1}^{n+1} K = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. En effet

$$\underbrace{\sum_{K=1}^{n+1} K}_{1+2+3+\dots+n+(n+1)} = \boxed{\sum_{K=1}^{n} K} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ce qui démontre le résultat voulu.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 100^2 = \sum_{t=1}^{100} k^2$$

$$\boxed{1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + 101} = \boxed{\sum_{k=1}^{101} (-1)^{k+1} \cdot k}$$

$$1 - 2 + 3$$

3.1.1 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$, alors $a \leq \frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{a\,b} \leq b$.

1) $P = $ " $a \leq b$ " ; $Q = $ " $a \leq \frac{a+b}{2}$ "

$$a \leq b$$

$$\Rightarrow \quad a + a \leq a + b$$

$$\Rightarrow \quad 2a \leq a + b$$

$$\Rightarrow \quad a \leq \frac{a+b}{2}$$

2) $P = $ " $0 \leq a \leq b$ " , $Q = \sqrt{ab} \leq b$

$$a \leq b$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot b \leq b \cdot b$$

$$\Rightarrow \quad ab \leq b^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{ab} \leq b$$