2M14 – Vendredi 10 octobre 2025 Nom & prénom : .....

Logarithmes et Exponentielles – TE 841A

Problème	1	2	3	4	5	6	**Total**
Points	12	4	9	4	5	5	39
Points obtenus							

Problème 1 (12 points)

Simplifier les expressions suivantes (transformer les racines en puissances le cas échéant):

a) $\dfrac{b^5}{\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt{b}}$

b) $\dfrac{4^{-1}\cdot 4^{-5}\cdot 4^{0}\cdot 4^{-1}}{4^{3}\cdot 4^{4}\cdot 16^{-2}}$

c) $(16\,b^8)^{3/4}$

d) $\sqrt[4]{b^{12}}$

e) $\dfrac{b^{-3}\cdot b^{9}}{b^{4}\cdot b^{-5}}$

f) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$

a) $b^5 \cdot b^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} = b^{23/6} = \sqrt[6]{b^{23}}$

b) $4^{-7} \div (4^7 \cdot 4^{-4}) = 4^{-7} \div 4^3 = 4^{-10} = \dfrac{1}{4^{10}}$

c) $16^{3/4} \cdot b^6 = (2^4)^{\frac{3}{4}}\, b^6 = 8b^6$

d) b^3

e) $b^6 \div b^{-1} = b^7$

f) $\left(5\cdot\left(5\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5\cdot 5^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{7}{8}}$

$= \sqrt[8]{5^7}$

Problème 2 (4 points)

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^x = 10$

b) $0.1^x = 0.008$

c) $x^{5/3} = 0.829$

d) $\log_x(4096) = 12$

a) $x = \ln(10) \cong \underline{2{,}30259}$

b) $x = \dfrac{\log(0.008)}{\log(0{,}1)} = -\log(0{,}008) \cong \underline{2{,}09691}$

c) $x = \left(\sqrt[5]{0{,}829}\right)^3 \cong \underline{0{,}89358}$

d) $x = \sqrt[12]{4096} = \underline{2}$

Problème 3 (9 points)

Résoudre les trois équations suivantes :

a) $11^2 \cdot 11^{2x} - 10 = -3 \cdot 11^{x+1}$

b) $2^{x^2} \cdot 4^x = 8$

c) $log(x) = 2\,log(x-2) + log(3)$

a) $11^{2(x+1)} + 3\,11^{x+1} - 10 = 0$

$t = 11^{x+1}$: $t^2 + 3t - 10 = 0$

$(t+5)(t-2) = 0$

- $t = -5$: ne convient pas.
- $t = 2$: $11^{x+1} = 2 \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(11)} - 1 \cong -0{,}71094$

b) $2^{x^2} \cdot 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

$x = -3$ ou $x = 1$

c) $\log(x) = \log(3(x-2)^2)$

$\Rightarrow x = 3(x^2 - 4x + 4)$

$3x^2 - 13x + 12 = 0$

$(3x - 4)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow$ ① $x = \frac{4}{3} < 2$ impossible

② $x = 3$ $\log(3) \overset{?}{=} 2\log(1) + \log(3)$ ✓

Problème 4 (4 points)

La longueur en cm L d'un spécimen femelle d'une certaine espèce de requins dépend de son âge selon la formule de croissance de von Bertalanffy

$$L = 110 \cdot (1 - e^{-0.425 \cdot t})$$

a) Calculer la longueur d'un requin femelle de 5 ans.

b) Quel est l'âge d'un requin femelle mesurant 104 cm?

a) $L(5) = 110\left(1 - e^{-0.425 \cdot 5}\right) \cong 96,862$ [cm]

b) $104 = 110\left(1 - e^{-0.425t}\right)$

$\Rightarrow e^{-0.425t} = 1 - \frac{104}{110}$

$e^{-0.425t} = \frac{3}{55}$

$\Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{3}{55}\right)}{-0.425} \cong \underline{6,844 \text{ [ans]}}$

$= \underline{6 \text{ ans } 10 \text{ mois}}$ 4 jours

Problème 5 (5 points)

Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient en avale une dose de 10 mg. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

a) À l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.

b) Donner approximativement la quantité du médicament dans le corps du patient 8h après l'absorption.

c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps?

a) $Q(t) = \underbrace{Q_0}_{10} e^{kt} = 10 e^{kt}$

$Q(1) = 8 \Rightarrow 10 e^{k} = 8 \Rightarrow k = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

$Q(t) = 10 e^{\ln(4/5)t} \Rightarrow \underline{Q(t) = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t}$

ou $\underline{Q(t) = 10 \cdot 0.8^t}$

b) $Q(8) = 10 \cdot 0{,}8^8 \cong \underline{1{,}678 \text{ [mg]}}$

c) $Q(t) = 1 \Rightarrow 10 \cdot 0{,}8^t = 1 \Rightarrow t = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)} \cong \underline{10.32 \text{ [h]}}$

Problème 6 (5 points)

Un kg d'un élément radioactif inconnu est entreposé dans un tonneau.

Après 100 ans, on constate qu'il en reste encore 995g.

a) Déterminer la fonction Q(t) qui exprime la masse de cet élément après t années.

b) Quelle masse de cet élément restera-t-il après 2500 ans ?

c) Calculer la demi-vie de cet élément.

a) $Q(t) = \underbrace{1000}_{1\,kg} e^{Kt}$

$Q(100) = 995 \Rightarrow 0{,}995 = e^{100K} \Rightarrow K = \frac{\ln(0.995)}{100}$

$\cong -0{,}0000501$

$Q(t) = 1000\, e^{-0.0000501\, t}$

b) $Q(2500) = 1000\, e^{-0.0000501 \cdot 2500} \cong 882{,}220$ [g]

c) Demi-vie : $e^{-0{,}0000501 t} = 0{,}5$

$\Rightarrow t \cong \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}0000501} \cong 13'835$ [ans]

(13'828 avec K en STO)