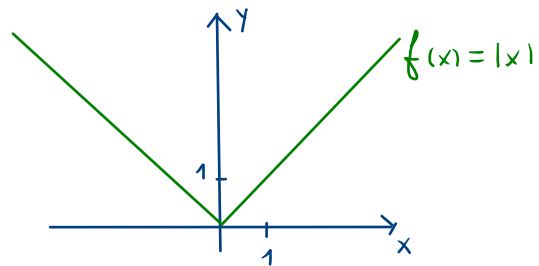


Fonction dérivable en un point

15.01.26

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 .
 f est dérivable en x_0 si le nombre dérivé $f'(x_0)$ existe.

Soit $f(x) = |x|$, f est continue sur $\mathbb{R}$.



Calculer, s'il existe, $f'(0)$.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \stackrel{\frac{?}{?}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \text{ n'est pas définie}$$

• à gauche $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

• à droite $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$

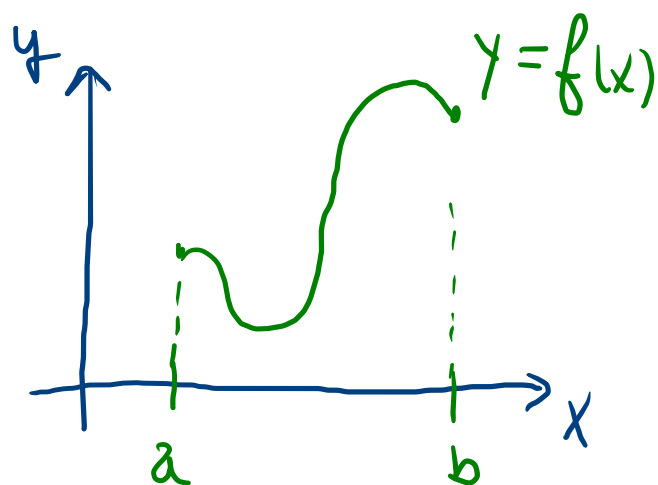
Une fonction continue en un point n'est pas forcément dérivable en ce point.

Théorème

Si f est dérivable en un point x_0 ,
alors f est continue en x_0

Fonction dérivable sur un intervalle.

Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable pour tout point de I .



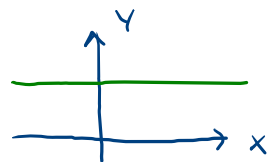
$$\begin{aligned} f :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Fonction dérivée

$$\begin{aligned} f' :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Formules de dérivation

① $(K)' = 0, K \in \mathbb{R}$



② $(x^n)' = n x^{n-1}, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \stackrel{\text{Ind } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 - x_0^2 &= (x - x_0)(x + x_0) \\ x^3 - x_0^3 &= (x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2) \\ x^4 - x_0^4 &= (x - x_0)(x^3 + x^2 x_0 + x x_0^2 + x_0^3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} \\ &= n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Ex: $(x^3)' = 3x^2$ $(x^8)' = 8x^7$

③ $(x^n)' = n x^{n-1}, n \in \mathbb{R}^*$

Ex: $(x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}$; $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{2}})' ; \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = (x^{-\frac{2}{3}})'$$
$$= -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \qquad \qquad = -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$= -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$$\textcircled{4} \quad (\sin(x))' = \cos(x)$$

2.6.9 En amplifiant chaque fraction par $\cos(x) + 1$, montrer que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \cdot \frac{\cos(x) + 1}{\cos(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x \cdot (\cos(x) + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x) + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + 1}$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

$$(\sin(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x) [\cos(h) - 1]}{h} + \frac{\cos(x) \sin(h)}{h} \right]$$

$$= \sin(x) \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_0 + \cos(x) \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{=1}$$

$$= \cos(x)$$

$$\textcircled{5} \quad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$\textcircled{6} \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\text{EX: } (x^3 + \sin(x))' = (x^3)' + (\sin(x))'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$\textcircled{7} \quad (f(x) \cdot g(x))' \neq f'(x) \cdot g'(x)$$

$$(x^8)' = 8x^7$$

$$(x^3 \cdot x^5)' \neq (x^3)' \cdot (x^5)' = 3x^2 \cdot 5x^4 = 15x^6$$

$$(f(x_0) \cdot g(x_0))' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\underline{f(x)g(x)} + \underline{f(x)g(x_0)} - \underline{f(x)g(x_0)} - \underline{f(x_0)g(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) \cdot [f(x) - f(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$(x^3 \cdot x^5)' = 3x^2 \cdot x^5 + x^3 \cdot 5x^4 = 3x^7 + 5x^7 = 8x^7$$

$$(x^8)' = 8x^7$$