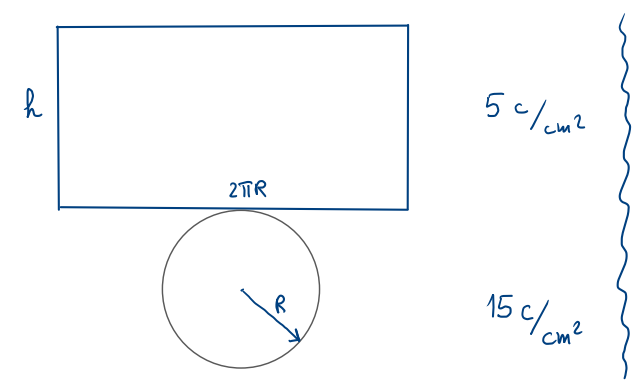


2.10.15 On construit un conteneur de forme cylindrique sans couvercle de volume 324π cm^3 . Le matériau utilisé pour le fond coûte 15 centimes par cm^2 et celui utilisé pour la paroi latérale 5 centimes par cm^2 . Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles sont les dimensions du conteneur le plus économique ?

$$V = 324\pi = \pi R^2 h \quad \Rightarrow \quad 324 = R^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{324}{R^2}$$



Prix : $\pi R^2 \cdot 15 + h \cdot 2\pi R \cdot 5 = \pi R^2 \cdot 15 + \frac{324}{R^2} \cdot 2\pi R \cdot 5$

$$= 15\pi R^2 + \frac{3240\pi}{R} = \frac{15\pi R^3 + 3240\pi}{R}$$

Fonction du prix : $f(R) = 15\pi \frac{R^3 + 216}{R}$, $R > 0$

$(Ku)' = Ku'$

Déterminons les extrema de cette fonction

$$f'(R) = 15\pi \frac{3R^2 \cdot R - (R^3 + 216) \cdot 1}{R^2} = 15\pi \frac{2R^3 - 216}{R^2}$$

R	0	4,76
$f'(R)$	///	- 0 +
$f(R)$	///	min

$$2R^3 = 216$$

$$R^3 = 108$$

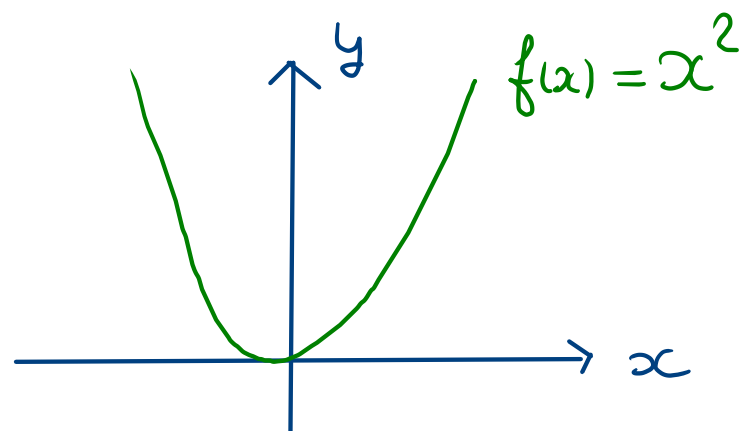
$$R = \sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4} \approx 4,76$$

On calcule h : $h = \frac{324}{9\sqrt[3]{16}} \approx 14,29$

Les dimensions sont $R \approx 4,76$ [cm] et $h \approx 14,29$ [cm]

$$(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{16}$$

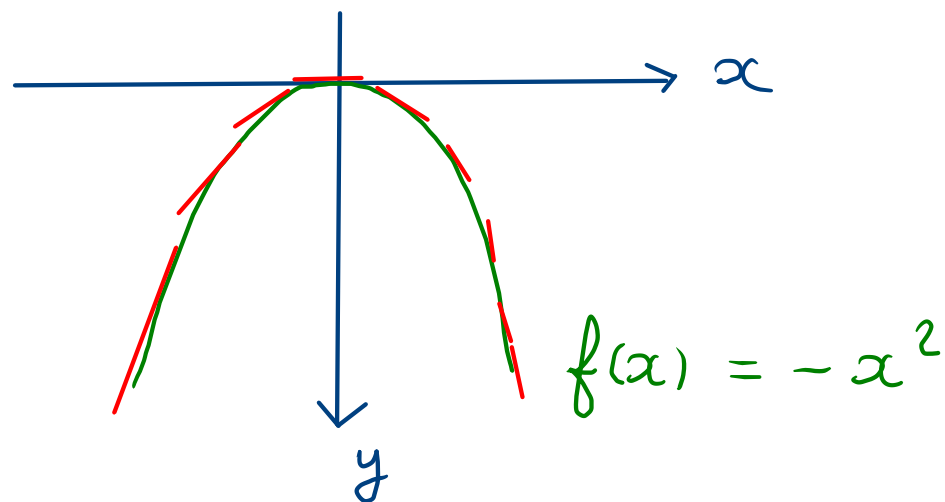
La dérivée seconde



$$f'(x) = 2x ; f''(x) = 2$$

x	0	
$f'(x)$	-	+
$f(x)$		
$f''(x)$	+	
$f(x)$		

convexe



$$f'(x) = -2x ; f''(x) = -2$$

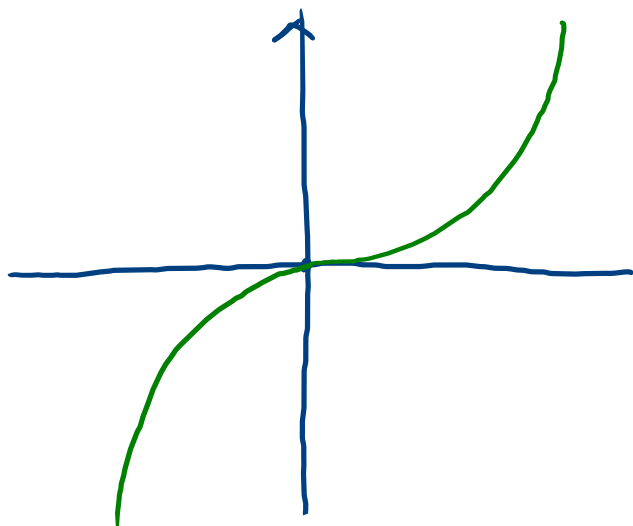
x	0	
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		
$f''(x)$	-	
$f(x)$		

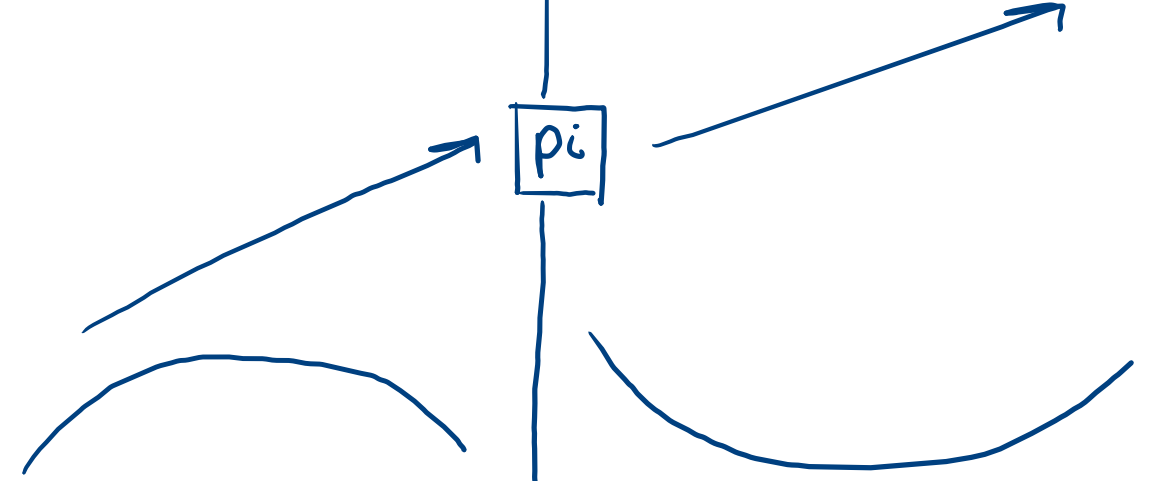
concave

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$



x	0		
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

point
d'inflexion

2.10.7 Étudier la courbure des fonctions suivantes :

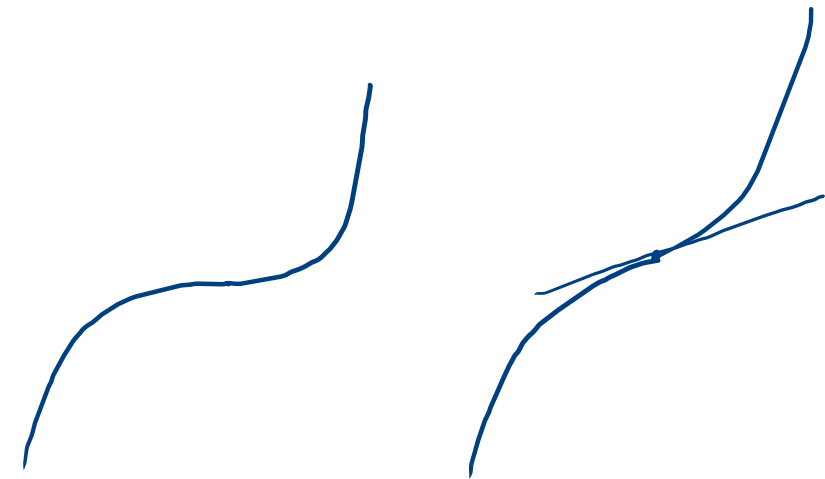
a) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

Convexe

b) $f(x) = x^3 + 3x + 8$

b) $f'(x) = 3x^2 + 3$; $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$
 $f''(x) = 6x$; $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x)$

x	0		
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		pi	



d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; $ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$; $ED(f') = \mathbb{R}$

$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$

$= \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 8x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2(x^2 + 1) \left[-(x^2 + 1) + 4x^2 \right]}{(x^2 + 1)^{\cancel{4}^3}}$

$= \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$ $ED(f'') = \mathbb{R}$

zéro : $3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

x	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$f''(x)$	$+$ $\emptyset$ $-$	$\emptyset$ $+$
$f(x)$		

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{4}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}\right)$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{4}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}\right)$