MATHÉMATIQUES I

École de maturité

GYMNASE DE BURIER

Table des matières

Août 2018 — v. 2.818

Chapitre 1

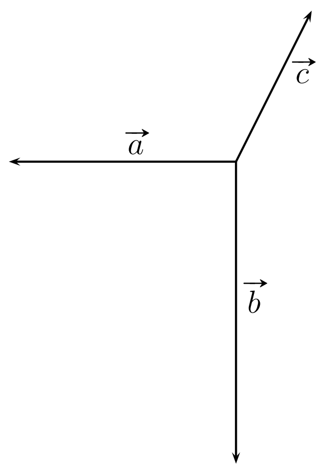
Géométrie vectorielle

1.1 Propriétés des vecteurs dans le plan et l'espace

1.1.1 Représenter un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Donner le nombre de vecteurs différents que l'on peut définir à l'aide des lettres de cette figure, ainsi qu'un représentant de chaque vecteur.

1.1.2

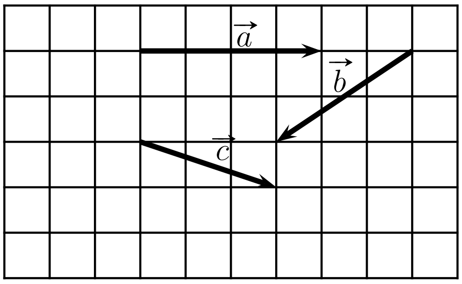
Construire la somme des trois vecteurs ci-dessous :



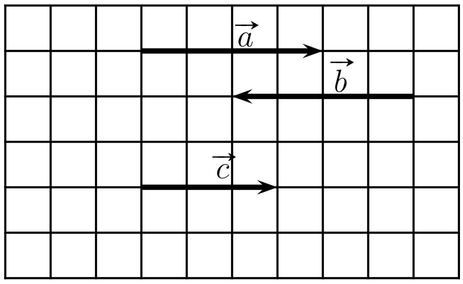
Tracer trois vecteurs non nuls et n'ayant pas la même direction mais dont la somme soit le vecteur nul.

1.1.3 Dans chaque cas, construire le vecteur demandé.

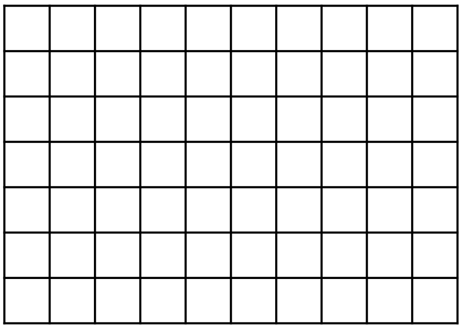
Cas 1

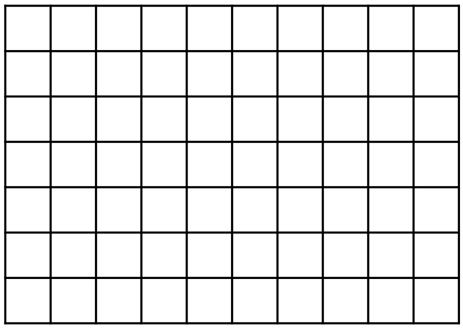


Cas 2

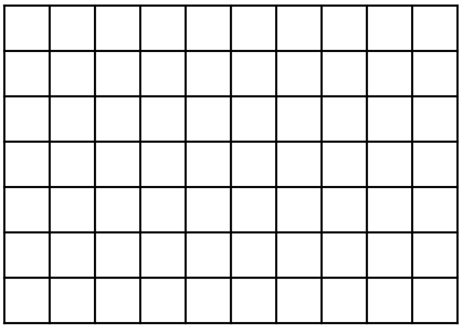


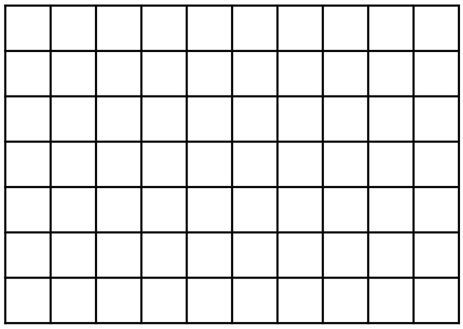
Le vecteur $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}$



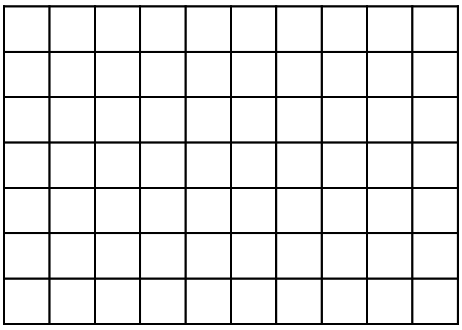


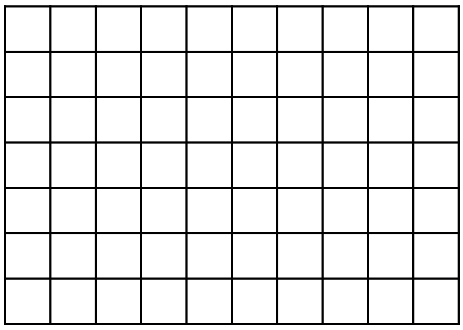
Le vecteur $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}$



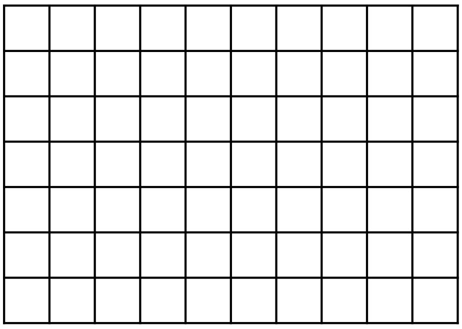


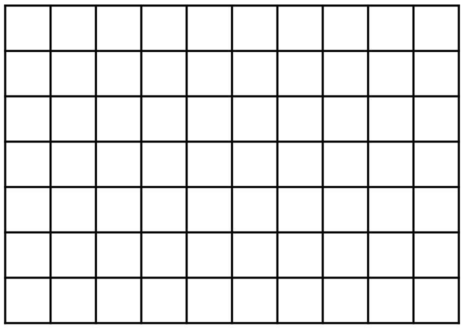
Le vecteur $\overrightarrow{a} - \left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\right)$





Le vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$





1.1.4 Soit A, B, C, D et E des points quelconques. Sans utiliser de dessin, simplifier le plus possible les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

1.1.5 On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté ci-dessous. Simplifier au maximum les expressions vectorielles suivantes :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

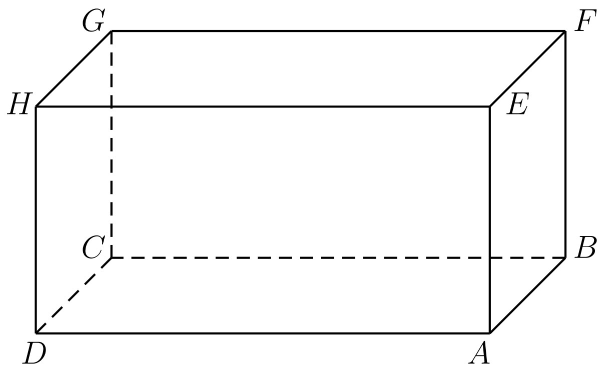
b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



1.1.6 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Exprimer plus simplement les vecteurs qui suivent. Utiliser le point O lorsque c'est nécessaire.

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$

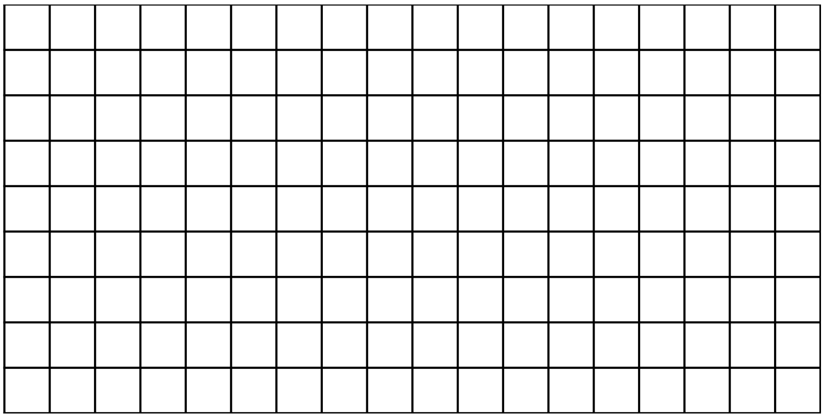
d) $\vec{d} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}$

1.1.7 Reprendre les vecteurs de l'exercice 1.1.3 et représenter dans les deux cas le vecteur

$$3\,\vec{a} + 2\,\vec{b} - 3/2\,\vec{c}$$



1.1.8 Représenter trois points A, B et P pour lesquels :

a) $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BP}$

d) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{BP}$

e) $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{-4}\overrightarrow{PB}$

g) $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$

1.1.9 Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ si

$$3\,(\vec{a} - 2\vec{v}) - 6\,\vec{b} = -7\left(\frac{15}{7}\vec{v} - 3\,\vec{b}\right) + 12\vec{a}.$$

1.1.10 Soit ABC un triangle quelconque. Notons P le milieu de AB et Q celui de AC. Faire une figure d'étude. Le théorème du segment moyen affirme que le segment PQ est parallèle au côté BC et que sa longueur est la moitié de celle de BC.

a) Exprimer ce résultat à l'aide de vecteurs.

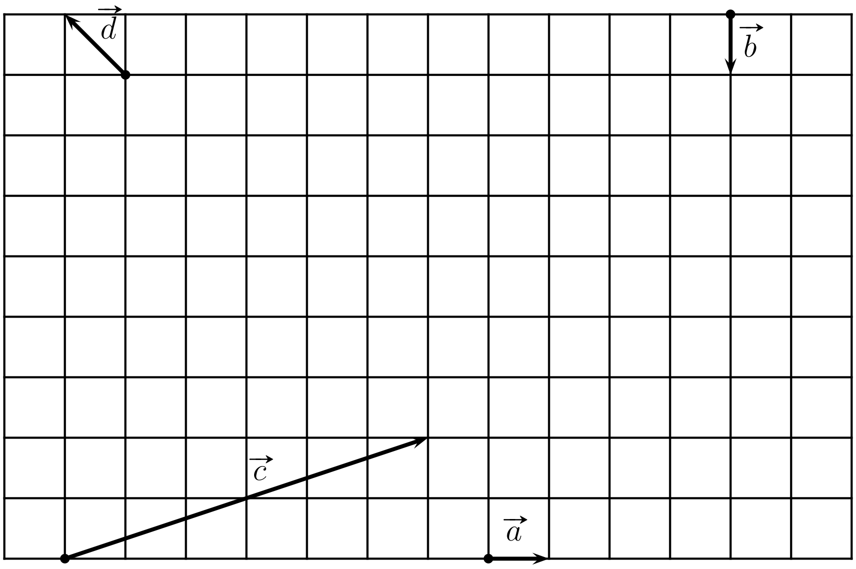
b) Démontrer le théorème du segment moyen par un calcul de vecteurs.

1.1.11 Par rapport aux vecteurs de la figure :

a) Exprimer $\overrightarrow{c}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

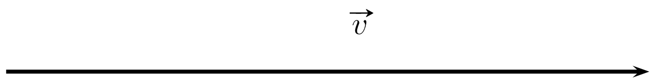
b) Exprimer $\overrightarrow{d}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

c) Exprimer $\overrightarrow{x} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{c} - 5\overrightarrow{d}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.



1.1.12 Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur donné. Construire à la règle (non graduée) et au compas les vecteurs :

$$\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{b} = -3\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{c} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{d} = \sqrt{2}\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{e} = \sqrt{3}\overrightarrow{v}$$



1.1.13 Soit $ABCD\ EFGH$ un cube pour lequel on pose $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AE}$. Soit M le milieu du côté FG, N celui de HG et P le centre de la face $ABCD$. Faire une figure d'étude puis exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$: $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NP}$, et $\overrightarrow{PM}$.

1.1.14 Soit $ABCD$ un parallélogramme pour lequel on pose $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de BC et P le point tel que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

1.1.15 Soit $ABCD$ un tétraèdre de l'espace[1], I le milieu de AC et J celui de BD. Prouver que :

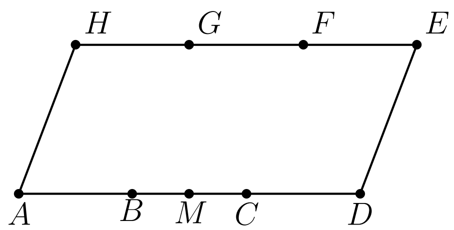
a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IJ}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

1.1.16 Démontrer que l'égalité suivante est toujours vraie : $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB}$.

1.1.17 Représenter un carré $OABC$ puis construire les points E, F, G et H tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OH} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{OB}.$$

1.1.18 Sur le parallélograme de la figure, les points G et F divisent le segment HE en trois parties égales, les points B et C divisent le segment AD en trois parties égales et M est le milieu de BC.
Donner un représentant de chaque vecteur colinéaire à $\overrightarrow{HG}$

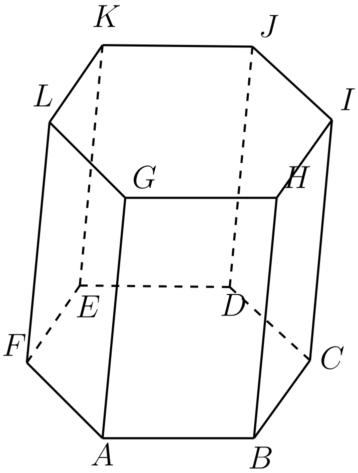


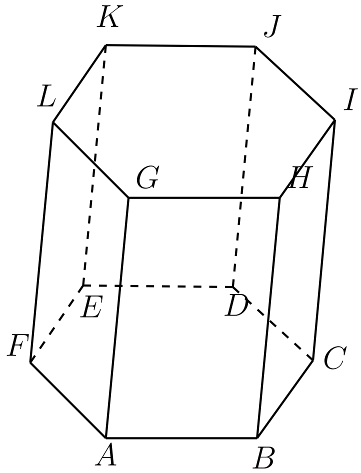
1. une pyramide à base triangulaire.

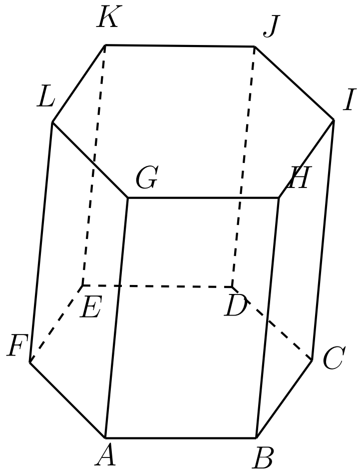
1.2 Repères, bases et combinaisons linéaires

1.2.1 On considère un prisme $ABCDEF\ GHIJKL$ dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaisons linéaires des deux autres.

a) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$ c) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$

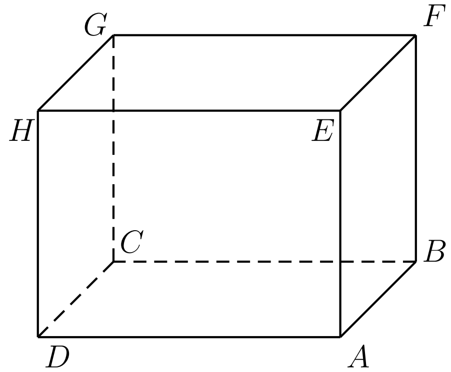




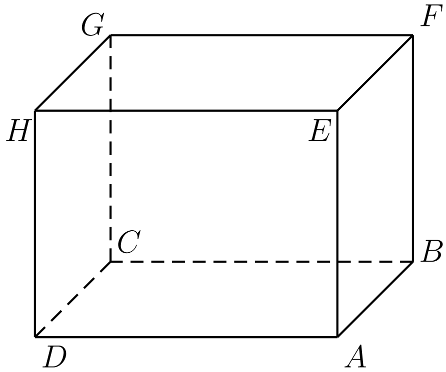


1.2.2 Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$. Réaliser une bonne figure d'étude. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

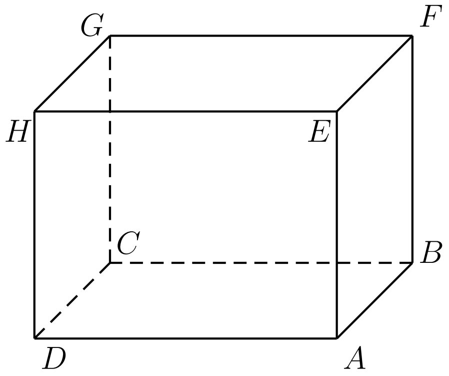
1.2.3 On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer chacun des trois vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.



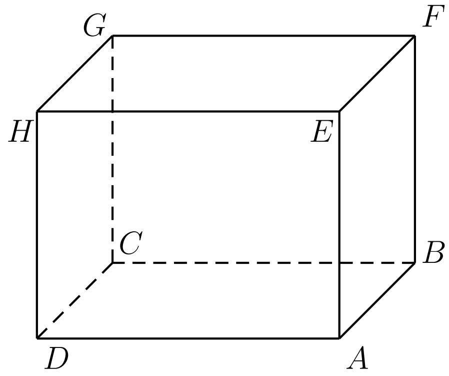
a) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG}$



b) $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{CD}$

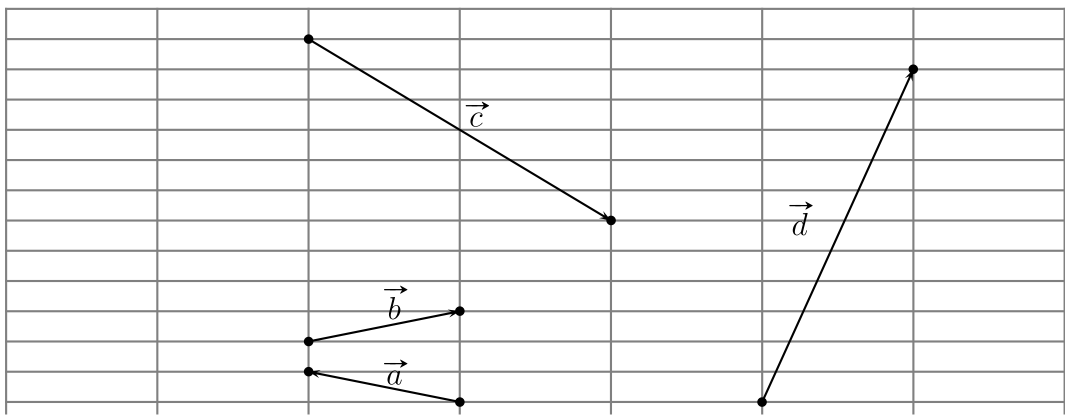


c) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AB}$

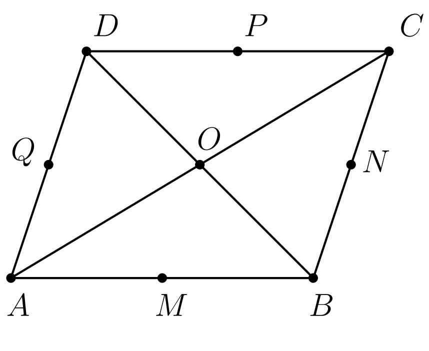


d) $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{GH}$

1.2.4 Exprimer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$ si :



1.2.5 Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.

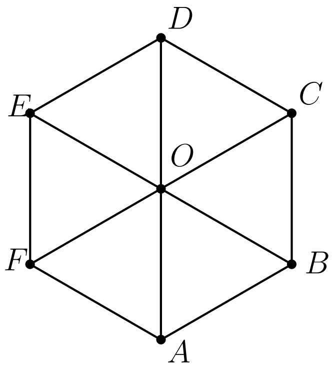


a) Donner, dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

b) Mêmes questions, mais relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AM}\right)$

1.2.6 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OE}$$



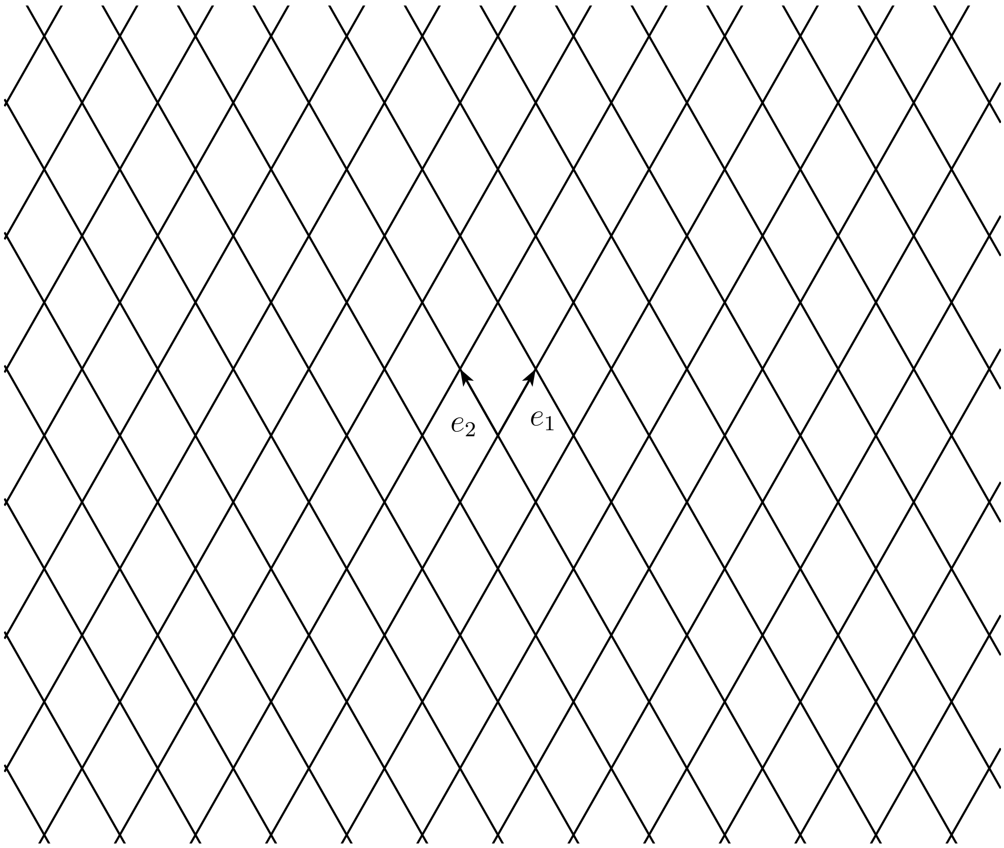
a) dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$

b) dans la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{ED}\right)$

c) dans la base $\mathfrak{B}_3 = \left(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}\right)$

d) dans la base $\mathfrak{B}_4 = \left(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{AB}\right)$

1.2.7 On considère la figure suivante



a) Représenter les vecteurs suivants, dont les composantes sont données relativement à la base $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $3\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$ et donner leurs composantes dans $\mathfrak{B}$.

1.2.8 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

c) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

1.2.9 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Calculer les nombres k et m tels que $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{c}$.

1.2.10 Soit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du vecteur $\vec{x}$ si

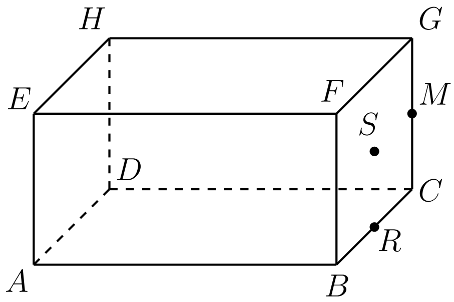
$$\frac{3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}}{4} - \frac{3\vec{a}}{8} = 0.9\left(\frac{\vec{x}}{12} + \frac{5}{3}\vec{b}\right) - 2\vec{a}.$$

1.2.11 Soit $\mathfrak{B} = (\vec{e_1};\ \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\vec{a};\ \vec{b}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

b) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

1.2.12 On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$ et S est le centre de la face $BCGF$.



a) Donner, relativement à la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$ les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AR},\ \overrightarrow{AK}.$$

b) Mêmes questions relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{CM};\ \overrightarrow{CD};\ \overrightarrow{BR}\right)$

1.2.13 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_3, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Former le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + 2\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Déterminer le vecteur $\vec{t}$ tel que $5\vec{t} - \vec{a} = \frac{3}{2}\left(2\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{t}\right) + \frac{5}{6}\vec{b}$

1.2.14 Exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.3 Alignement, colinéarité, coplanarité et milieux

1.3.1 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix},\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix},\ \vec{h} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/3 \end{pmatrix},\ \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

1.3.2 Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

1.3.3 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels quel $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$

1.3.4 Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

1.3.5 Déterminer k pour que les vecteurs suivants soient coplanaires :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

1.3.6 Calculer les vecteurs qui sont à la fois coplanaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et coplanaires à $\vec{d}$ et $\vec{f}$, si

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix}\ \text{et}\ \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.7 On donne les points $A(5;2;-3)$, $B(8;0;5)$, $C(-2;-4;1)$ et $D(4;-6;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

e) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

f) $4\overrightarrow{CD}-3\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\right)$

1.3.8 On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme

b) $ABDC$ soit un parallélogramme

1.3.9 Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales, si $A(2;3)$ et $B(3;8)$.

1.3.10 On donne les sommets $A(3;-2;5)$ et $B(7;5;10)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection $P(5;4;6)$ de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.

1.3.11 Les points M, N et P suivants sont-ils alignés ?

$$M(13;-22;2) \qquad N(-5;-10;26) \qquad P(-38;12;60)$$

1.3.12 Déterminer dans chaque cas la constante k pour les points A, B et C soient alignés :

a) $A(1;2)$, $B(-3;3)$ et $C(k;1)$

b) $A(2;k)$, $B(7k-29;5)$ et $C(-4;2)$.

1.3.13 On donne trois points A, B et C. Déterminer, dans les cas suivants, le nombre réel α pour qu'ils soient alignés :

a) $A(2;3;5)$, $B(3;5;8)$, $C(5;9;\alpha)$.

b) $A(\alpha;-3;-4)$, $B(3;1;0)$, $C(0;\alpha+2;\alpha+1)$.

1.3.14 On donne $A(7;-3)$ et $B(23;-6)$. Déterminer le point C de l'axe Ox qui est aligné avec A et B.

1.3.15 Soit $A(-2;14)$, $B(6;-2)$, $C(4;-2)$ et $D(6;10)$. Déterminer le point P d'intersection des droites AB et CD.

1.3.16 Les droites AB et CD de l'espace sont-elles confondues, strictement parallèles, sécantes ou gauches ? Traiter les cas ci-dessous :

a) $A(6;4;-4)$ $B(4;0;-2)$ $C(7;0;-2)$ $D(11;-4;0)$;

b) $A(-4;2;1)$ $B(-1;1;3)$ $C(0;5;2)$ $D(9;2;4)$;

c) $A(8;0;3)$ $B(-2;4;1)$ $C(8;3;-2)$ $D(0;0;5)$;

d) $A(2;-3;1)$ $B(3;-2;3)$ $C(0;-5;-3)$ $D(5;0;7)$?

1.3.17 On donne les points $A(3;2)$, $B(-5;6)$ et $C(-2;-3)$.
Trouver les coordonnées des points situés respectivement au quart de AB depuis A, aux deux tiers de BC depuis B.

1.3.18 Les points $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.

1.3.19 Soit les points $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

1.3.20 On donne trois points A, B et C. Calculer les coordonnées du sommet D du parallélogramme $ABCD$, celles des milieux M, N, P et Q des côtés AB, BC, CD, DA ainsi que celles des centres de gravité G_1 et G_2 des triangles ABC et CDA.

$$A(-4;1;3) \quad B(4;3;6) \quad C(4;-6;3)$$

1.3.21 On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Déterminer ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.4 Produit scalaire et norme

1.4.1 Calculs de normes

a) Calculer la norme des vecteurs du plan ou de l'espace :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 6/10 \\ -4/5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Etablir que les vecteurs suivants sont unitaires : $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{45} \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/-3 \end{pmatrix}$.

c) On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\|; \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|; \| - 2\vec{a}\| + 2\|\vec{a}\|; \|\vec{a}\|\vec{c}; \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}; \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\|$$

d) On donne $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre k sachant que la norme de $\vec{d}$ vaut 10.

e) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que

$$\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$$

1.4.2 Calculer le périmètre du triangle ABC si $A(2; 1; 3)$, $B(4; 3; 4)$ et $C(2; 6; -9)$.

1.4.3 Etablir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6; 4)$, $B(12; -2)$ et $C(17; 9)$.

1.4.4 Soit $A(7; 1)$, $B(5; 5)$, $C(5; -3)$ et $I(2; 1)$. Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.

1.4.5 Déterminer k pour que $P(2; -1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5; 3)$ et $B(-2; k)$.

1.4.6 Soit $A(1; 2)$, $B(3; 8)$ et $P(x; y)$. A quelle condition sur x et y le point P est-il situé sur la médiatrice de AB ?

1.4.7 Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.

1.4.8 On considère deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Trouver une condition géométrique qui assure que $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

1.4.9 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

1.4.10 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

1.4.11 Résoudre les problèmes suivants :

a) Calculer m, sachant que les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre k pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires.

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

d) Déterminer a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit à la fois orthogonal à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.

1.4.12 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle en A, puis calculer son aire, si $A(7;5)$, $B(8;7)$, $C(12;5)$ et $D(13;2)$.

1.4.13 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle, si $A(-4;5;3)$, $B(-1;1;5)$, $C(5;5;4)$ et $D(2;9;2)$.

1.4.14 On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Evaluer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

a) $\vec{a} \cdot \left(7\vec{b} + \vec{c}\right)$

b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{b}$

c) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{c} \cdot \vec{d}\right)$

d) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} - \vec{d}\right)$

e) $\|\vec{d}\|\left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$

f) $\vec{a} + \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

1.4.15 Considérons un losange $ABCD$ dans lequel on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Prouver que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont perpendiculaires.

1.4.16 On donne les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(\lambda;\lambda)$. Déterminer λ pour que le triangle ABC soit rectangle

a) en A ;

b) en B ;

c) en C ;

Représenter ensuite les solutions sur une figure à l'échelle.

1.4.17 On donne les points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et le point $C(0;5)$. Déterminer tous les points C du plan tels que le triangle de sommets A, B et C soit un triangle rectangle. Parmi les triangles trouvés, en est-il qui sont isocèles ?

1.4.18 On donne les points $A(-2;3;-2)$ et $B(-6;-1;1)$. Calculer le point P qui est situé sur l'axe Ox et tel que le triangle APB soit rectangle en P.

1.4.19 Les droites AB et CD de l'espace sont dites **orthogonales** si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont perpendiculaires. Des droites orthogonales peuvent être gauches ou sécantes. Dans ce dernier cas, on dit que les droites sont **perpendiculaires**.
Examiner dans chacun des cas si les droites AB et CD sont perpendiculaires :

a) $A(8;-1;3)$, $B(11;11;5)$, $C(4;1;-1)$ et $D(6;0;2)$.

b) $A(1;3;5)$, $B(-2;4;1)$, $C(-2;2;-6)$ et $D(-10;10;2)$.

1.4.20 Soit $A(-7;-3)$, $B(11;3)$ et $C(1;-4)$. Calculer le point D qui est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

1.4.21 Soit $A(-3;-1)$, $B(1;3)$, $C(-1;7)$ et $D(0;3)$. Déterminer le point P de la droite CD qui est situé à la même distance des points A et B.

1.4.22 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle. Construire et calculer la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

1.4.23 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle, puis construire la projection $\vec{a}\,'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, ainsi que la projection $\vec{b}\,'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$. Calculer les composantes des vecteurs $\vec{a'}$ et $\vec{b'}$.

1.4.24 Calculer dans chaque cas la longueur de la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.4.25 Calculer la projection $\vec{a}\,'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, ainsi que la projection $\vec{b}\,'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$, si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.4.26 Indiquer si l'angle formé par les deux vecteurs est aigu, obtus ou droit :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4.27 On donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Décomposer le vecteur $\vec{a}$ en une somme de deux vecteurs, le premier parallèle à $\vec{b}$, le second perpendiculaire à $\vec{b}$.

1.4.28 Calculer l'angle aigu formé par les droites AB et CD, si $A(1;5)$, $B(7;3)$, $C(2;1)$ et $D(-3;1)$.

1.4.29 On considère un cube $ABCD\ EFGH$. Notons M, N et P les milieux respectifs de AE, EH et AB. Calculer l'angle entre les vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$;

b) $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$;

c) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

1.4.30 L'aire du triangle ABC vaut 3 et le centre de gravité de ce triangle est situé sur l'axe Ox. Calculer le sommet C, connaissant $A(3;1)$ et $B(1;-3)$.

1.4.31

On donne les points $A(-2;-1)$, $B(7;0)$ et $C(1;5)$.

Calculer les coordonnées du quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

1.4.32

Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on donne deux sommets $A(6;-1)$, $B(-2;6)$ et le centre de gravité $G(3;4)$.

1.4.33
On donne les points $A(4;0)$, $B(0;6)$, $C(6;10)$ et $D(-2;-4)$.

a) Calculer les coordonnées des points M, R, S, T milieux respectivement de AB, BC, BD, AD.

b) Montrer que le quadrilatère $TMRS$ est un parallélogramme.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites TR et MS.

1.5 Produit vectoriel et produit mixte

1.5.1 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les produits vectoriels $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}$, $(2\vec{a}) \times \left(-3\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ et $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

b) Le produit vectoriel est-il associatif ?

1.5.2 Former un vecteur normal au plan ABC, si $A(0;2;1)$, $B(0;1;0)$ et $C(1;0;2)$.

1.5.3 Simplifier l'expression $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

1.5.4 On done les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$?

1.5.5 Calculer l'angle aigu que forme la droite OC avec le plan ABC, dans les cas suivants :

a) $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(2;2;-4)$.

b) $A(0;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $C(1;2;2)$.

1.5.6 On donne un tétraèdre de sommets $A(1;-5;2)$, $B(3;-6;0)$, $C(-3;6;15)$ et $D(6;5;-3)$.

a) Calculer l'angle aigu que forment les faces ABC et ABD.

b) Calculer l'angle aigu que forme l'arête AD avec la face ABC.

1.5.7 On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Vérifier avec ces vecteurs l'identité de Lagrange.

1.5.8

a) Vérifier que $ABCD$ est un parallélogramme et calculer son aire avec $A(2;1;-2)$, $B(2;3;0)$, $C(6;6;5)$, $D(6;4;3)$.

b) Calculer l'aire du triangle ABC si $A(3;-2;3)$, $B(4;0;3)$ et $C(6;0;-3)$.

c) Déterminer la longueur de la hauteur issue de A dans la triangle ABC où $A(-1;2;-5)$, $B(5;4;0)$ et $C(11;8;3)$.

d) Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. Prouver algébriquement que le rapport de l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{a}-\vec{b}$ avec celle du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égal à 2.

e) On considère un cube $ABCD\ EFGH$ dont les arêtes mesurent a. On désigne par M le milieu de l'arête AE. Exprimer l'aire du triangle MCH en fonction de a.

1.5.9

a) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$?

b) Les points ci-dessous sont-ils coplanaires ?

$$A(0;3;-2), \quad B(1;2;2), \quad C(-3;1;5), \quad D(12;-3;5)$$

c) Déterminer k pour que les vecteurs ci-dessous soient coplanaires.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

d) Déterminer sur l'axe Oz un point coplanaire à $A(1;1;1)$, $B(0;-2;3)$, $C(4;1;-1)$.

e) Calculer $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]$, si $A\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6};\frac{-1}{2}\right)$, $C\left(\frac{5}{4};-1;\frac{5}{4}\right)$ et $D\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{10};\frac{-1}{10}\right)$.

1.5.10 Soit $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ une base orthonormée directe de l'espace. Les triplets suivants sont-ils orientés positivement ou négativement ?

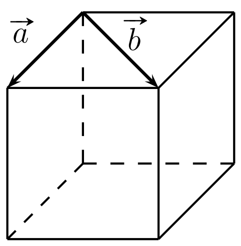
a) $(\vec{e_1};\vec{e_3};\vec{e_2})$;

b) $(\vec{e_2};-\vec{e_3};\vec{e_1})$;

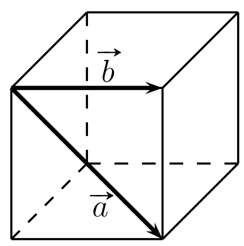
c) $(-\vec{e_2};\vec{e_1};\vec{e_3})$.

1.5.11 Le cube dessiné a des arêtes de longueur 1. Représenter le vecteur :

a) $\vec{a} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$



b) $\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \times \vec{b}$



1.5.12 Représenter graphiquement des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, avec $\vec{b} \neq \vec{c}$ pour lesquels $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$.

1.5.13 Déterminer k et $\vec{x}$ de telle sorte que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$, si $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.5.14 Illustrer l'affirmation suivante :
« Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan α et si $\vec{m}$ est un vecteur normal au plan β, alors $\vec{n} \times \vec{m}$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection de α et β (les deux plans sont supposés sécants). »

1.5.15 Calculer la distance du point $P(1;2;2)$ à la droite passant par $A(1;-1;2)$ et $B(0;-2;1)$.

1.5.16 Pour visser ou dévisser un boulon centré au point B à l'aide d'une clé, on exercice une force sur l'extrémité M du manche de la clé (dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du boulon). L'efficacité de cette force à faire tourner le boulon dépendra alors de la longueur du manche, de l'intensité de la force exercée. ainsi que de l'angle de la force par rapport au manche.
Désignons la force $\vec{f}$, posons $\vec{l} = \overrightarrow{BM}$, et notons Ψ l'angle des vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{l}$. Les physiciens ont établi que l'efficacité de la force à faire tourner le boulon est proportionnelle à $\|\vec{f}\| \cdot \|\vec{l}\| \cdot \sin\Psi$.
On définit que le vecteur $\vec{m} = \vec{l} \times \vec{f}$ est le **moment de force** déterminé par $\vec{f}$ et $\vec{l}$.
Réaliser une bonne figure illustrant les divers éléments ci-dessus.
Quelle est la direction de $\vec{m}$? Dans quel sens est le vecteur $\vec{m}$? Que vaut la norme de $\vec{m}$?

1.5.17 Démontrer les formules de calcul de volume pour le parallélépipède et pour le tétraèdre.
Indications pour la première formule : on considère comme base le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, et comme hauteur le vecteur obtenu en projetant $\overrightarrow{c}$ sur $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

1.5.18

a) Vérifier que $ABCD\ EFGH$ est un parallélépipède et calculer son volume si :

$A(-1;-1;7)$	$C(0;1;6)$	$E(2;-2;3)$	$G(3;0;2)$
$B(-2;1;6)$	$D(1;-1;7)$	$F(1;0;2)$	$H(4;-2;3)$

b) Calculer le volume du tétraèdre $PQRS$ si

$$P(2;-1;1), \quad Q(5;5;4), \quad R(3;2;-1), \quad S(4;1;3).$$

c) Soit $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Déterminer un point D situé sur l'axe Oy tel que le tétraèdre $ABCD$ ait un volume égale à 5.

d) Calculer la hauteur issue de D dans le tétraèdre $ABCD$ si :
$A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$.

1.5.19 Soit ABC un triangle dont les côtés mesurent a, b et c. La formule de Héron donne l'aire S du triangle :

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ où } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Démontrer cette formule à l'aide de l'identité de Lagrange.

1.5.20 On donne les points

$A(1;4;1)$	$C(-5;-11;5)$	$Q(3;-11;-1)$
$B(-2;-8;3)$	$P(3;5;-1)$	$R(0;-3;1)$

Démontrer que les plans ABC et PQR sont parallèles.

1.6 Solutions des exercices

Propriétés des vecteurs dans le plan et l'espace

1.1.1 18 vecteurs :
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FC}$.

1.1.4

a) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{DC}$ e) $\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{DA}$

1.1.5

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{HA}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{AE}$

1.1.6

a) $\overrightarrow{FE}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DB}$ e) $\overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{FC}$

1.1.9 $\vec{v}=\vec{a}+3\vec{b}$

1.1.10

a) $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$

b) $2\overrightarrow{PQ}=2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ})=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}$

1.1.11 a) $\vec{c}=6\vec{a}-2\vec{b}$ b) $\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}$ c) $\vec{x}=2\vec{a}+6\vec{b}$

1.1.13

a) $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$ d) $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ g) $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}$

b) $\overrightarrow{EM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ e) $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

c) $\overrightarrow{EN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ f) $\overrightarrow{NP}=-\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

1.1.14

a) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ b) $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$ c) $\overrightarrow{DM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

1.1.18 $\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{MA}$

Repères, bases et combinaisons linéaires

1.2.1

a) Oui. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EK}$

b) Oui. $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{ID} + 3\overrightarrow{LG}$

c) Non.

1.2.2

a) $\overrightarrow{SD} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

b) $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{w}$

c) $\overrightarrow{BD} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

d) $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$

e) $\overrightarrow{BC} = -\vec{v} + \vec{w}$

f) $\overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w}$

1.2.3

a) Oui. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DG}$

b) Non.

c) Oui. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EG}$

d) Oui. $\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{EC}$

1.2.4

$\vec{a} = -\frac{3}{7}\vec{c} - \frac{1}{7}\vec{d}$; $\vec{b} = \frac{5}{14}\vec{c} + \frac{2}{7}\vec{d}$

1.2.5

a) $\overrightarrow{AB} = (1;0)$, $\overrightarrow{AD} = (0;1)$, $\overrightarrow{AM} = (1/2;0)$, $\overrightarrow{AQ} = (0;1/2)$ $\overrightarrow{AN} = (1;1/2)$, $\overrightarrow{AP} = (1/2;1)$, $\overrightarrow{AO} = (1/2;1/2)$, $\overrightarrow{OB} = (1/2;-1/2)$, $\overrightarrow{QP} = (1/2;1/2)$, $\overrightarrow{CM} = (-1/2;-1)$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.2.6

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2.7 b) $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $3\vec{b} + 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

1.2.8

a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

1.2.9 $k = 3, m = 2$

1.2.10 $\begin{pmatrix} -98 \\ 20 \end{pmatrix}$

1.2.11

a) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$

b) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$

1.2.12

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$

1.2.13

a) $\vec{v} = (-3; 13; -7)$

b) $\vec{t} = (54/29; -34/29; 14/29)$

1.2.14

a) $\vec{v} = 4 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$

b) $\vec{v} = 1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$

c) $\vec{v} = (-t - 14) \cdot \vec{a} + (7 - t) \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} \qquad t \in \mathbb{R}$

d) Il n'est pas possible d'exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des trois autres.

Alignement, colinéarité, coplanarité et milieux

1.3.1 $\vec{a} = 1/2\,\vec{d} = 9\,\vec{h}$; $\vec{b} = -3/2\,\vec{\imath}$; $\vec{c} = -2\,\vec{g}$; $\vec{f}$; $\vec{e}$

1.3.2 a) $m = -14$ b) $m = 6$ ou $m = -2$

1.3.3 $\lambda = 35/29$ et $\vec{x} = (105/29; -30/29)$

1.3.4

a) Les vecteurs sont coplanaires.

b) Les vecteurs sont coplanaires.

c) Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

d) Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

1.3.5 $k = 1/2$ ou $k = 3$

1.3.6 Les vecteurs sont de la forme $k \cdot (65, 29, -10)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1.3.7

a) $(3; -2; 8)$

b) $(-4; -6; -2)$

c) $(7; 6; -4)$

d) $(9; -4, 10)$

e) $(1; 8; -6)$

f) $(33; -14; 32)$

1.3.8

a) $(-5; 8)$

b) $(13; 16)$

1.3.9 $(2.2; 4)$ $(2.4; 5)$ $(2.6; 6)$ $(2.8; 7)$

1.3.10 $C = (7; 10; 7)$ $D = (3; 3; 2)$

1.3.11 Les points ne sont pas alignés.

1.3.12

a) $k = 5$

b) $k = 1$ ou $k = 32/7$

1.3.13

a) $\alpha = 14$

b) $\alpha = -3$ ou $\alpha = 5$

1.3.14 $C(-9; 0)$

1.3.15 $P(4.5, 1)$

1.3.16

a) Les droites sont sécantes.

b) Les droites sont gauches.

c) Les droites sont gauches.

d) Les droites sont strictement parallèles.

1.3.17 $(1;3)$, respectivement $(-3;0)$

1.3.18 $A(-5;7)$, $B(1;-3)$, $C(3;1)$

1.3.19 $M_{AB}(-3/2;5/2)$, $M_{AC}(-1;7/2)$, $M_{BC}(3/2;4)$, $G(-1/3;10/3)$

1.3.20 $D(-4;-8;0)$, $M(0;2;9/2)$, $N(4;-3/2;9/2)$, $P(0;-7;3/2)$, $Q(-4;-7/2;3/2)$, $G_1(4/3;-2/3;4)$, $G_2(-4/3;-13/3;2)$

1.3.21

a) $C(-2;-2)$

b) $D(0;-6)$

Produit scalaire et norme

1.4.1

a) 5 ; $\sqrt{73}$; $\sqrt{26}/2$; 1 ; 3 ; $\sqrt{3}$; 5

b) Les vecteurs sont unitaires, car leur norme vaut 1.

c) 24 ; $\sqrt{82}$; 20 ; $(-30;0)$; $(3/5;4/5)$; 1

d) $k \in \{-5;7\}$

e) $m \in \{-23/10;3/2\}$

1.4.2 $\sqrt{182}+16 \simeq 29.5$

1.4.3 Le triangle est isocèle car $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$. Son aire vaut 48 unités carrées.

1.4.4 $\|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IC}\| = 5$

1.4.5 $k=-4$ ou $k=2$

1.4.6 Il faut que $(x; y)$ satisfasse l'équation $x + 3\,y = 17$.

1.4.7 $(3; -2)$

1.4.8 Il faut que les vecteurs soient colinéaires.

1.4.9

a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

1.4.10

a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

1.4.11

a) $m = 10/3$

b) $k = 4/7$

c) $\vec{w} = (-6; 2)$ et $k = 3$

d) $a = 4$ et $b = -5$

1.4.12 En calculant les produits scalaires, on constate que $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$. Le trapèze est donc rectangle en A. Son aire vaut 12.5 unités carrées.

1.4.14

a) 102

b) $(55; -11)$

c) 14

d) 50

e) 36

f) Pas défini.

1.4.16

a) $\lambda = 10$

b) $\lambda = -5$

c) $\lambda = -2$ ou $\lambda = 5/2$

1.4.17 Les points possibles sont : $C(1.5; 5)$, $C'(2; 5)$, $C''(4; 5)$, $C'''(6.5; 5)$.
Le triangle $AC''B$ est isocèle en C''.

1.4.18 Les points possibles sont :$P(-1; 0; 0)$ et $P'(-7; 0; 0)$

1.4.19

a) Les droites sont orthogonales mais pas perpendiculaires.

b) Les droites sont perpendiculaires. (Elles se coupent en $E(-5; 5; -3)$.)

1.4.20 $D(-0.1; -0.7)$

1.4.21 $P(1; -1)$

1.4.22 $\overrightarrow{p} = (3/2; 1/2)$

1.4.23 Les vecteurs s'écrivent : $\overrightarrow{a'} = (168/25; 224/25)$ et $\overrightarrow{b'} = (672/169; 280/169)$.

1.4.24

a) $23/5$

b) $18/\sqrt{17}$

1.4.25

a) $\overrightarrow{a'} = (0; 0)$ et $\overrightarrow{b'} = (0; 0)$

b) $\overrightarrow{a'} = (9/25; -12/25)$ et $\overrightarrow{b'} = (-3; 0)$

c) $\overrightarrow{a'} = (16/13; 0; -24/13)$ et $\overrightarrow{b'} = (8/9; 16/9; -16/9)$

1.4.26

a) L'angle est obtus.

b) L'angle est aigu.

1.4.27 $\vec{a} = (20/7; -5/7; 10/7) + (-6/7; -2/7; 11/7)$

1.4.28 $18.43\,^\circ$

1.4.29

a) $60\,^\circ$

b) $70.53\,^\circ$

c) $120\,^\circ$

1.4.30 $C(2;2)$ ou $C(5;2)$

1.4.31 $D(-8;4)$

1.4.32 $C(5;7)$

1.4.33

a) $M(5;5)$, $R(3;8)$, $S(-1;1)$. $T(1;-2)$

b) $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TM} = (4;7)$ et les points ne sont pas alignés

c) $I(2;3)$

Produit vectoriel et produit mixte

1.5.1

a) $(-12;-4;8)$, $(-6;-13;4)$, $(16;-2;4)$, $(-12;-4;8)$, $(72;24;-48)$
$(24;8;-16)$, $(-36;52;-28)$, $(6;40;-4)$

b) Les deux derniers calculs de la question a) montrent que le produit vectoriel n'est pas associatif.

1.5.2 $(-3;-1;1)$

1.5.3 On sait que pour tous vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V_3$, la propriété de distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition s'applique :

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

On sait également que

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

On peut donc développer notre expression comme suit

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right) &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}\\ &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{b}\\ &= \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c}\\ &= \vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\end{aligned}$$

1.5.4 Non

1.5.5

a) $7.33\,^\circ$

b) $5.11\,^\circ$

1.5.6

a) $45\,^\circ$

b) $42.88\,^\circ$

1.5.8

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0;2;2)$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(4;3;5)$ et l'aire vaut 12 unités carrées.

b) L'aire du triangle vaut 7 unités carrées.

c) La longueur vaut $22/\sqrt{61}$ unités.

d) –

e) L'aire du triangle est donnée par $3a^2/4$.

1.5.9

a) Oui

b) Non

c) $k=3$ ou $k=1/2$

d) $(0;0;19/9)$

e) $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=0$

1.5.10

a) Négativement

b) Négativement

c) Positivement

1.5.13 $k=-27$ et $\vec{x}$ est de la forme $(t/3+2;2\,t/3+9;t)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

1.5.15 $\sqrt{6}$

1.5.18

a) Le volume du parallélépipède vaut 18 unités cubes.

b) Le volume du tétraèdre vaut 3 unités cubes.

c) Il y a deux points possibles : $D(0; -7; 0)$ et $D'(0; 8; 0)$.

d) La hauteur vaut 11.

1.5.20 Il suffit de vérifier que les vecteurs perpendiculaires aux plans π_{ABC} et π_{PQR} sont colinéaires.

Pour ce faire, on calcule en premier lieu les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3,\ -12,\ 2) \quad \overrightarrow{AC} = (-6,\ -15,\ 4)$$

On fait ensuite le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-18,\ 0,\ -27)$$

On procède de même pour le plan passant par P, Q et R.

$$\overrightarrow{PQ} = (0,\ -16,\ 0) \quad \overrightarrow{PR} = (-3,\ -8,\ 2)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-32,\ 0,\ -48)$$

On voit bien que les deux vecteurs normaux sont colinéaires :

$$(-32,\ 0,\ -48) = \frac{16}{9} \cdot (-18,\ 0,\ -27)$$

Les deux plans sont donc parallèles.

Chapitre 2

Algèbre

2.1 Développer une expression

2.1.1 Effectuer et réduire :

a) $3+(xz+y^2)$

b) $3-(xz+y^2)$

c) $3(xz+y^2)$

d) $(2a+b-c)+(3a-b+c)$

e) $(2a+b-c)-(3a-b+c)$

f) $(2a+b-c)(3a-b+c)$

g) $(x^3-2x^2-5)+(-4x^3-1)$

h) $(x^3-2x^2-5)-(-4x^3-1)$

i) $(x^3-2x^2-5)(-4x^3-1)$

j) $\left(u+\dfrac{v}{4}\right)+\left(\dfrac{3u}{4}-\dfrac{5v}{6}\right)$

k) $\left(u+\dfrac{v}{4}\right)-\left(\dfrac{3u}{4}-\dfrac{5v}{6}\right)$

l) $\left(u+\dfrac{v}{4}\right)\left(\dfrac{3u}{4}-\dfrac{5v}{6}\right)$

2.1.2 Effectuer et réduire :

a) $(a+b)^2$

b) $(a-b)^2$

c) $(a+b)(a-b)$

d) $(a+b)^3$

e) $(a-b)^3$

f) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

g) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

2.1.3 Effectuer et réduire :

a) $(a+8)^2$

b) $(y^4-3b)^3$

c) $(u-3)(u+3)$

d) $(2m-5n)(4m^2+10mn+25n^2)$

e) $(7-f)^2$

f) $(4+2z^2)^3$

g) $(3+y^3)(y^6-3y^3+9)$

h) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

i) $(t+3u^5)^3$

j) $(2x-7)^2$

k) $(b^2-c^3)(b^2c^3+b^4+c^6)$

l) $(a-3b)^3$

2.1.4 Réduire au maximum.

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(1+x)^2-(1-x)^2$

c) $\left(\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}\,y\right)^2$

d) $(2\,x+y)^2+(2\,x-y)^2-2\,(2\,x+y)(2\,x-y)$

e) $(3\,x+y)(3\,x-y)-(3\,x+2\,y)^2-(x-3\,y)^2$

f) $(x+2)^2-(x+1)^2-(x+1)(x-1)-x\,(x+4)-4$

g) $(x+y)(x-y)+(x-y)^2-(x+y)^2+y\,(4\,x+y)$

h) $(x^2+4\,y^2)(x+2\,y)(x-2\,y)-(x^2-2\,y^2)^2$

i) $(3\,x-2\,y)^2+(4\,x+y)(4\,x-y)-(5\,x-3\,y)^2+6\,y(y-3\,x)$

j) $(2\,x-y)^2\,(2\,x+y)^2-(x-2\,y)^2(x+2\,y)^2-15\,(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

2.1.5 Réduire au maximum.

a) $-(6\,ab^2-7\,x^3)(6\,ab^2+7\,x^3)$

b) $(4\,x^2-7\,y^3)^2-(x^2-5\,y^2)(4\,x^2+y^3)$

c) $(3\,x-2\,y)^2-(4\,x+5\,y)^2-2\,(2\,x-y)(3\,x-5\,y)$

d) $(2\,a-3\,b)^3-(2\,a-3\,b)^2-(2\,a-3\,b)$

2.1.6 Soit $p(x)=2\,x^3-3\,x^2+5\,x-1$ et $q(x)=3\,x^3+2\,x^2-4\,x+2$. Déterminer

a) le polynôme $p+q$

b) le degré du polynôme $p\cdot q$, ainsi que le coefficient de son terme de degré 4.

2.1.7 Soit $p(x)=x^2+x+2$ et $q(x)=x^3-2\,x$. Déterminer les polynômes

$$p+q,\quad p-q,\quad \text{et}\quad p\cdot q$$

2.1.8 Soit les polynômes

$a(x) = 3\,x^2 - 4\,x + 3$, $p(x) = x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 17$ et $q(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 5\,x + 18$

a) calculer et réduire au maximum $\left(a(x)\right)^2$
b) calculer $p - q$
c) déterminer le degré du polynôme $p \cdot q$
d) déterminer le coefficient du polynôme $p \cdot q$ de degré 7
e) déterminer le coefficient du polynôme $p \cdot q$ de degré 4

2.1.9 Effectuer et réduire.

a) $(2\,x - y - z) - (3\,x + 2\,y - 3\,z) - (4\,x + y - z) + (5\,x + 4\,y - 4\,z)$
b) $\left(\frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x^2y\right) - \left(x^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{10}y^3\right) + \left(\frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2y + \frac{1}{8}\,xy^2 + \frac{1}{10}\,y^3\right)$
$- \left(-\frac{2}{3}\,x^2y - \frac{3}{4}xy^2 - \frac{4}{5}y^3\right)$
c) $x^2y - \{-\left[2xy^2 + 7x^3 + 5x^2y\right] + 4xy^2\} - 6x^2y$
d) $2\,xy + 3\,y^2 - \left\{-\frac{1}{2}\,x^2y + \left[\frac{1}{2}\,y^2 - \left(3\,xy + \frac{5}{4}\,x^2y\right)\right] - \left(\frac{1}{8}\,x^2y - 4\,y^2\right)\right\}$
e) $\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^3 - x^4 - \left\{\frac{3}{4}\,x^2y^2 - \left(\frac{1}{2}\,x^3\right)^2 + \left[(-2\,x)^4 + \frac{1}{4}\,x^2y^2 - \frac{8}{27}\,x^6\right]\right\}$
f) $(3\,x^2 - x + 2)(4\,x + 3)(2\,x - 1)$
g) $(x - 3)(x + 4)(x - 5)(x + 6)$
h) $x(x + 1) - 3\,x(-x + 3) + 2(x^2 - x)$
i) $\left[x(x + y) - y(x - y)\right](x + y) - xy(x + y)$
j) $(x + y)(x - 2\,y)(2\,x - y) - (2\,x + y)(x - 2\,y)(x - y)$

2.1.10 Réduire.

a) $(x - 1)^3 - (x - 1)(x + 1)(x - 3)$
b) $(x + 1)(x - 1)^2 - (x - 2)^3$
c) $(x^2 + 2\,x + 1)^2 - 4\,x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
d) $(x + y)^3 - (x - y)^3 - (x^3 - y^3) - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
e) $19(x^3 + y^3) - (3\,x - 2\,y)^3 - (3\,y - 2\,x)^3 - 18\,xy(x + y)$
f) $x^4 + y^4 + (x^2 + y^2 + 2\,xy)^2 - 2(x^2 + y^2 + xy)^2$
g) $(2\,x - 3\,y)^3 - 3\,y(x - 3\,y)^2 - 9\,xy(4\,y - x)$
h) $\left[(x - y)(x + y) + (2\,x - y)^2\right]^3$
i) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$
j) $\left[(x - y)(x - y)\right]^2 - (x^2 + y^2)^2 + 4\,xy\left[(x - y)^2 + xy + 1\right]$

2.1.11 Vérifier les égalités suivantes.

a) $(2\,x - 3\,y)^2 - (3\,x - 2\,y)^2 = (5\,y - x)(x + y)$
b) $(a\,x + b\,y)^2 + (a\,y - b\,z)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$
c) $2\,(x + y)^2 - (x + 2\,y)^2 = (x + y)(x - y) - y^2$
d) $(x - 1)(x - 2)(x - 4) + x(x - 2) = (x - 2)^3$

2.2 Factoriser une expression

2.2.1 Factoriser :

a) $xy + y$

b) $ma + ap$

c) $a^3x^2 - a^2x^3$

d) $4uv - 2uw$

e) $6a^2 + 4ab$

f) $24y^3z^5 - 36yz^2$

g) $2yz^5 + 8y^2z^4 + 6y^3z^3 - 2y^4z^2$

h) $15m^7n^2 - 10m^5n^3$

i) $3a^2bc^2 - abc^3$

j) $(2a + 3b)(2x + y) + (3a + 5b)(2x + y)$

k) $3ab^4c^3 - ab^3c^2$

l) $2u^3v^2 + 8u^3v^3 - 6u^4v$

m) $(x - 3)(x + 1) + 2(x - 3)^2 - (x - 3)$

n) $(u + v)^3 - (u + v)^2$

o) $2a(a - b) - (a - b)^2$

2.2.2 Factoriser :

a) $a^2b^2 - m^2$

b) $x^4 - y^2$

c) $a^2 - \dfrac{1}{16}$

d) $(a + b)^2 - x^2$

e) $(ax + 2y)^2 - (2x - 3y)^2$

f) $(a - b)^2 - 1$

g) $3a^2 - 3$

h) $4x^5y^2 - 9x^3$

i) $a^4 - b^4$

j) $a^5 - a$

k) $\dfrac{u^4}{625} - \dfrac{v^4}{81}$

l) $x^5y^4 - x$

m) $a^2 + 2a + 1$

n) $1 + 2x^2 + x^4$

o) $a^4 + 9b^2 - 6a^2b$

p) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y$

q) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$

r) $\dfrac{xy}{3} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4}$

s) $(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$

t) $5x^2 - 10x + 5$

u) $x^2(a + b) + 2(a + b)x + a + b$

2.2.3 Factoriser :

a) $x^{12}-125$

b) $a^4-\dfrac{8ab^3}{27}$

c) $27c^3+\dfrac{1}{64}$

d) $z^3+8a^3b^6$

e) z^6+27

f) $z^3-6z^2+12z-8$

g) $1+9a+27a^2+27a^3$

h) $x^3+x^2y+\dfrac{xy^2}{3}+\dfrac{y^3}{27}$

i) $12a^3+\dfrac{9ab^2}{4}+\dfrac{3b^3}{16}+9a^2b$

2.2.4 Factoriser :

a) x^2+5x+6

b) x^2+5x+4

c) u^2-6u+8

d) $x^2-2x-35$

e) $9x^2+6x+1$

f) $4z^2+5z+1$

g) $x^2-2x-80$

h) $3y^2+7y+3$

i) $6x^2+5x+1$

j) $x^2-22x+85$

k) x^2+x+1

l) $16u^2-72u+81$

m) $40x^2+3x-28$

n) $a^2+9a-10$

o) $2x^2-5x-2$

p) $4m^2+25m-21$

2.2.5 Factoriser :

a) x^4-13x^2+36

b) a^6+19a^3-216

c) x^8-257x^4+256

d) $7x^4-61x^2-18$

e) $64x^6-91x^3+27$

f) $6x^4+7x^2-3$

g) $16x^8-641x^4+625$

h) $81z^4+80z^2-1$

2.2.6 Factoriser :

a) $ax+bx+ay+by$

b) $a+b+ax+bx+ay+by$

c) $ax-bx-ay+by$

d) $ax-4x+4y-ay$

e) $ax+x-a-1$

f) x^3+x-x^2-1

g) $\dfrac{xy}{2}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{yz}{3}-\dfrac{z}{6}$

h) $10xz-10z-x^2+x$

i) $a^2-2ab+b^2-1$

j) $4x^2+2x-9y^2-3y$

k) $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

l) $8y^4-8y^3+y-1$

m) x^3+x-x^2-1

n) $2a^4-3-2a^3+3a$

o) $6x^2 + xy + 18xz + 3yz$

2.2.7 Décomposer en facteurs après avoir groupé.

a) $x - 2\,y - x^2 + 2\,xy + (x - 2\,y)^2$

b) $2\,x^2 + 3\,x - 10\,xy - 15\,y$

c) $3\,x^3 - 20\,y^2z - 5\,z + 12\,x^3y^2$

d) $8\,x + (2\,x + 3\,y)(x - 2\,y) - 6\,x^2 + 12\,y - 9\,xy + (2\,x + 3\,y)^2$

e) $\dfrac{xz}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{yz}{3} - \dfrac{y}{6}$

f) $x^5 - \frac{4}{5}\,x^2y - \frac{5}{4}\,x^3z + yz$

g) $\frac{2}{9}\,x^2y^3 - \frac{1}{20}\,x^2 + \frac{40}{27}\,y^3 - \frac{1}{3}$

h) $3\,x^4y^3z + x^4y^3 + 3x^3y^4z - 3\,x^2y^5z - x^2y^5$

i) $x^{3m+2} - 2\,x^{m+2}y^m + x^{2m}y^{m+3} - 2\,y^{2m+3}$ avec $m \in \mathbb{N}^\star$

j) $x^{3m+1} - x^{2m+1}y^{2n} + 2\,x^my^{3n} - 2\,y^{5n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^\star$

2.3 Division euclidienne

2.3.1 Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans chacun des cas suivants et poser l'égalité fondamentale correspondante :

a) $A(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ $B(x) = x - 5$

b) $A(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ $B(x) = x^2 + 2x - 1$

c) $A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5$ $B(x) = x^2 - 3$

d) $A(x) = 35x^3 + 47x^2 + 13x + 1$ $B(x) = 5x + 1$

e) $A(x) = x^8 + x^4 + 1$ $B(x) = x^2 - x + 1$

f) $A(x) = x^7 - 4x^6 + 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$ $B(x) = x^5 - 3$

g) $A(x) = x^8 - x^4 + 1$ $B(x) = 2x^5 + 1$

h) $A(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x$ $B(x) = x + 2$

i) $A(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ $B(x) = -\frac{3}{5}x$

j) $A(x) = 3x + 2x^2 - 5 + x^3$ $B(x) = -1 + x^2 - 2x$

2.3.2 Effectuer la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 3\,x^4 - 7\,x^3 - 18\,x^2 + 28\,x + 24$ et $b(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 4$

b) $a(x) = 12\,x^4 + 47\,x^3 + 10\,x^2 + 12$ et $b(x) = -3\,x^2 - 8\,x + 6$

c) $a(x) = x^5 - 3\,x^2 + x + 5$ et $b(x) = -\,x^2 + x - 1$

2.3.3 Par quel polynôme faut-il multiplier $x - 5$ pour obtenir $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x - 30$?

2.3.4 Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2 + 1$ soit $5\,x^2 - 3\,x + 1$ et le reste $1 - x$.

2.3.5 Calculer la valeur numérique $P(a)$ du polynôme $P(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 7$ pour chacune des valeurs a suivantes : 1, 3, 0, -2, -3, $1/3$ et $-1/2$.

2.3.6 Effectuer la division euclidienne de $t^5 - 7\,t^4 - t^2 - 9\,t + 9$ par $t^2 - 5\,t + 4$.

2.3.7 Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

2.3.8 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5$ et $b(x) = x - 1$

b) $a(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $b(x) = x + 2$

c) $a(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7$ et $b(x) = x$

2.3.9 Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

a) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ $\quad B(x) = x - 3$

b) $A(x) = x^4 - x + 1$ $\quad B(x) = x + 2$

c) $A(x) = x^3 - 27$ $\quad B(x) = x - 3$

2.3.10 Déterminer les quotients des divisions exactes.

a) $(x^3 - 3\,x^2 + 4) \div [(x - 2)(x + 1)]$

b) $(9\,x^4 + 9\,x^3 - 7\,x^2 - 9\,x - 2) \div [(x + 1)(3\,x + 1)]$

2.3.11 Considérons le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Déterminer s'il est divisible par :

$$\text{a) } x-1 \quad \text{b) } x+4 \quad \text{c) } x+\frac{1}{2} \quad \text{d) } x+1 \quad \text{e) } x+5 \quad \text{f) } x-3$$

En déduire une factorisation de $P(x)$.

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

2.3.13 Déterminer, sans effectuer la division, m et n sachant que :

a) $x^3 + mx + n$ est divisible par $(x-1)(x+2)$,

b) $x^3 + mx^2 + n$ est divisible par $x^2 - x - 6$.

2.3.14 Je suis un polynôme de degré 5 et possède les propriétés suivantes :

- je m'annule en 0 et en 2,
- je suis divisible par $x + 2$,
- $x - 3$ apparaît dans ma factorisation,
- le reste de ma division par $x + 3$ est égal à -630,
- mon évaluation en $x = 1$ est égale à 6.

Qui suis-je ?

2.3.15 Factoriser le polynôme :

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45$ sachant que $P(5) = 0$ et $P(-3) = 0$,

b) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x$ sachant que 2 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

2.3.16 Factoriser le polynôme $p(x) = 2\,x^3 - 8\,x^2 + 8\,x$

2.3.17 Déterminer les solutions entières de l'équation $2x^4 + 11x^3 + 4x^2 - 29x + 12 = 0$.

2.3.18 Factoriser :

$$\text{a) } x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x \quad \text{b) } x^5 + 3x^4 - 16x - 48 \quad \text{c) } 6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$$

2.3.19 Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x - 1$

b) $x^5 + 1$ par $x + 1$

c) $3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6$ par $x + 2$

2.3.20 Monter que $x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$ est divisible par $x - 1$.

2.3.21 Calculer le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $g(x)$.

a) $f(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$ $g(x) = 2\,x^2 - 1$

b) $f(x) = 2\,x^3 - 1$ $g(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 7\,x^5 - x^4 + 6\,x^3 - 7\,x$ $g(x) = 7\,x^3 - x$

d) $f(x) = 6\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2$ $g(x) = 2\,x^2 - 3$

e) $f(x) = 14\,x^4 - 27\,x^3 + 21\,x^2 - 3\,x - 2$ $g(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 2$

f) $f(x) = 14\,x^5 - 36\,x^4 + 23\,x^3 - 11\,x^2 + 18\,x - 8$ $g(x) = 7\,x^3 - x$

g) $f(x) = 12\,x^5 - 7\,x^4 + 2\,x^2 - 6\,x$ $g(x) = -5\,x^2 + 2\,x - 1$

2.3.22 Le polynôme $p(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 11\,x - 6$ possède un zéro compris entre 0 et -5. Décomposer le polynôme $p(x)$ en un produit de facteurs.

2.3.23 Factoriser les polynômes.

a) $x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$

b) $x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$

c) $x^5 + 3\,x^4 - 16\,x - 48$

d) $x^5 - 3\,x^4 - 21\,x^3 + 43\,x^2 + 96\,x - 180$

2.3.24 Factoriser si possible les polynômes suivants.

a) $p(x) = x^2 + 19\,x + 18$

b) $p(x) = x^2 - 4\,x + 4$

c) $p(x) = 2\,x^2 + 5\,x - 3$

d) $p(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 2$

e) $p(x) = 4\,x^2 - 20\,x + 25$

f) $p(x) = x^2 - 9$

g) $p(x) = x^2 - \frac{4}{9}$

h) $p(x) = 9\,x^2 - 5\,x$

i) $p(x) = 8\,x^2 + 6\,x + 1$

j) $p(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

2.3.25 Résoudre les équations suivantes par factorisation.

a) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12 = 0$

c) $4\,x^5 - 12\,x^4 + 9\,x^3 = 0$

d) $16\,x^3 - 16\,x^2 - 4\,x + 4 = 0$

2.3.26 Résoudre les équations.

a) $x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 - 5\,x - 6 = 0$

b) $x^4 - 7\,x^3 + 18\,x^2 - 20\,x + 8 = 0$

c) $35\,x^3 + 47\,x^2 + 13\,x + 1 = 0$

d) $x^3 + 5\,x^2 - 8\,x - 48 = 0$

2.3.27 Factoriser :

a) $x^3 + 2x^2 + x$

b) $2a^6 - 6a^4 + 6a^2 - 2$

c) $9a^3 - ab^2$

d) $54a^6 - 2$

e) $1 - (x - y)^2$

f) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2$

g) $(-3x + y)^2 - (4x - z)^2$

h) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

i) $xy - 9x^3y$

j) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$

k) $2a^3b - a^2b^2 + b^2 - 2ab$

l) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$

m) $b^3 - a^3$

n) $3x^4 - 18x^3 + 36x^2 - 24x$

o) $8a^4x^3 - 72b^2x^3 - a^4 + 9b^2$

p) $x^3 + 9x - 27 - 3x^2$

q) $d^3 - 8 + 3(d^2 - 4d + 4)$

r) $x^4y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y + x$

s) $z^2x^6 - 5z^2x^4 + 4z^2x^2$

t) $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6$

u) $x^3y + 7x^2y + 6xy$

v) $16a^4 + 2ab^3$

w) $8c^3 + 6c + 12c^2 + 1$

x) $(y^2 + b^2)^2 - 4b^2y^2$

2.4 Fractions rationnelles

2.4.1 Rendre les fractions rationnelles irréductibles :

a) $\dfrac{54a^3b^3}{15a^5b^2}$ b) $\dfrac{-16u^2v^2w^3}{-4u^3vw^2}$ c) $\dfrac{x-1}{2x-2}$

d) $\dfrac{2x-2y}{3y-3x}$

e) $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

f) $\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

g) $\dfrac{x-x^3}{x^4+2x^3+x^2}$

h) $\dfrac{3z^2-21z+36}{2z^2-12z+18}$

i) $\dfrac{x^3-15x^2+75x-125}{x^2-25}$

j) $\dfrac{x^4-y^4}{x^5-x^3y^2}$

k) $\dfrac{10x^2-10xy}{5x^2y^2-5x^4}$

l) $\dfrac{6x^2+2x}{27x^3+1}$

m) $\dfrac{1-x^2+x^3-x^5}{x+x^2-x^3-x^4}$

n) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

o) $\dfrac{2x^3+9x^2+7x-6}{2x^3+x^2-13x+6}$

2.4.2 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{a+7}{a-1}\cdot\dfrac{a^2-1}{2a+14}$

b) $\dfrac{x+5}{7}\div\dfrac{2x+10}{x-8}$

c) $(x+y)\div\dfrac{x+y}{x-y}$

d) $\dfrac{z^2+z}{z-1}\cdot\dfrac{z-z^2}{z^3}$

e) $\dfrac{x+2}{2x-3}\div\dfrac{x^2-4}{2x^2-3x}$

f) $\dfrac{9x^2-4}{3x^2-5x+2}\cdot\dfrac{9x^4-6x^3+4x^2}{27x^4+8x}$

g) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x-2}{x-3}$

h) $\dfrac{6x^2-5x-6}{x^2-4}\div\dfrac{2x^2-3x}{x+2}$

i) $\dfrac{5u^2+12u+4}{u^4-16}\cdot\dfrac{u^2-2u}{25u^2+20u+4}$

2.4.3 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x+6}{x+3}$

b) $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x+6}{x+3}$

c) $\dfrac{6}{x^2-4}-\dfrac{3x}{x^2-4}$

d) $\dfrac{2}{3x+1}+\dfrac{9}{(3x+1)^2}$

e) $\dfrac{5}{a}-\dfrac{2a-1}{a^2}+\dfrac{a+5}{a^3}$

f) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$

g) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{2x}{x^2+5x+6}$

h) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{m^2-1}-\dfrac{2m+1}{m-m^3}$

i) $\dfrac{2y+1}{y^2+4y+4}-\dfrac{6y}{y^2-4}+\dfrac{3}{y-2}$

j) $\dfrac{13-5x}{6x^2-6}+\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{3x-5}{3x-3}$

2.4.4 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{2\,xy}{x^2-y^2}$

b) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-2\,y}{x+y}+\dfrac{x^2+3\,y^2}{y^2-x^2}$

c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2\,x+1}{x-x^3}$

d) $\dfrac{4}{x^2-y^2}+\dfrac{3\,y}{x^2y-x^3}-\dfrac{x-3\,y}{x^3-xy^2}$

e) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+xy}$

f) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{4\,x-6\,y}{xy+3\,y+2\,x+6}+\dfrac{y+6}{y+2}$

g) $\dfrac{x+2}{x^2+7\,x+10}-\dfrac{x-3}{x^2-8\,x+15}+\dfrac{x^2-15}{x^2-25}$

h) $\dfrac{2\,x^2-x-7}{x^4-5\,x^2+4}-\dfrac{x-3}{x^3-2\,x^2-x+2}$

2.4.5 Effectuer et réduire :

a) $\left(\dfrac{z+2}{z}-\dfrac{2}{z^2+z}\right)\left(\dfrac{1}{z}+1\right)$

b) $\left[\left(x+\dfrac{2x}{x-2}\right)\left(\dfrac{2x}{x-2}-2\right)\right]\div\dfrac{4x^2}{x^2-4}$

c) $\left(\dfrac{1}{u}-\dfrac{2}{u^2}-\dfrac{3}{u^3}\right)\div\left(\dfrac{1}{u^2}-1\right)$

d) $\dfrac{2x-1}{x+y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{4x^2-1}\cdot\left(1-\dfrac{2x}{2x-1}+\dfrac{1}{2x+1}\right)$

2.5 Equations et systèmes d'équations

2.5.1 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $4\,(x-3)+x\,(x-5)-30=0$

b) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)=42$

c) $(x-2)(x-4)+(x+3)(x-1)=39$

d) $(x-6)(x+1)+(2\,x+3)(x-5)=0$

e) $(3\,x-5)^2-12x=1$

f) $x-7=6-(x-7)^2$

g) $(5\,x-1)^2+x^2+3=0$

h) $2\,(3\,x+1)^2-32\,(3\,x+1)+126=0$

i) $(x+1)^2-(x-1)^2=(x-8)^2$

j) $(4\,x+1)^2-(3\,x+1)^2=(2\,x+1)^2$

k) $(x+3)^3-(x-4)^3=721$

l) $(x-5)^3-(x+2)^3+91=0$

m) $(2\,x+1)^2-(x-1)(x+11)=(3\,x-2)^2-(3\,x-4)^2$

n) $(x+5)^2-(2\,x-1)(3\,x+5)=(x+3)^2-(x+1)^2$

o) $(4\,x-3)(2\,x-1)-(3\,x+5)^2=(2\,x+3)^2-(4\,x-1)(2\,x+7)-73$

2.5.2 Résoudre l'équation $2\,x^2+7\,x-15=0$. Puis factoriser le polynôme $2\,x^2+7\,x-15$. Factoriser les polynômes ci-dessous d'une manière analogue.

a) $2\,x^2-7\,x-4$

b) $6\,x^2+11\,x+4$

c) $6\,x^2-25\,x-25$

d) $6\,x^2-20\,x+25$

e) $12\,x^2+23\,x-24$

f) $5\,x^2+\frac{29}{3}\,x-\frac{14}{3}$

2.5.3 Résoudre les équations.

a) $x^2-9=0$

b) $4\,x^2-1=0$

c) $(x-2)^2-9\,(x-2)=0$

d) $(x^2-x-6)(x+5)=0$

e) $x^4-5\,x^2+4=0$

f) $(x-1)(x^2+1)=0$

g) $x^3+x^2=4\,x+4$

h) $x^2-9-4\,(x-3)=0$

i) $(x+6)^2-3\,(x+6)+2=0$

j) $x^3+2\,x^2-x-2=0$

2.5.4 Résoudre les équations.

a) $(x^2 - 8\,x + 12)(x + 2)^3 = 0$

b) $(x - 3)(x^2 - 4) = 0$

c) $x^3 + 2\,x^2 - 4\,x = 8$

d) $(2\,x^2 + 3\,x + 1)^2 - (2\,x^2 - 4\,x - 1)^2 = 0$

e) $x\,(x - 2) + (x - 3)(x - 2) = 0$

f) $6\,x^2 = 3\,x^3 - 72\,x$

g) $x^3 + 3\,x^2 = 9\,x + 27$

h) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x\,(x^2 - 9)$

2.5.5 Résoudre l'équation $(x^2 - 2)^2 - 5\,(x^2 - 2) - 14 = 0$

2.5.6 Résoudre les équations suivantes.

a) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 1 = 0$

c) $x^4 + 2\,x^2 + 1 = 0$

d) $x^6 - 7\,x^3 - 8 = 0$

e) $(x^2 - 1)^2 - 2\,(x^2 - 1) + 1 = 0$

f) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} - 3 = 0$

g) $(x^2 - 5\,x + 6)^2 - 2\,(x^2 - 5\,x + 6) = 0$

2.5.7 Résoudre les équations.

a) $\dfrac{x - 8}{5} + \dfrac{x^2}{3} = 1$

b) $\dfrac{3\,x - 7}{5} + \dfrac{x^2 - 9}{7} = 2$

c) $\dfrac{1 - 8\,x}{2} - \dfrac{x^2 - 7}{4} + 2\,x = 0$

d) $\dfrac{x^2 - 3}{2} - \dfrac{x^2 + 1}{3} = \dfrac{x^2 - 11}{6}$

e) $\dfrac{3\,x + 1}{8} - \dfrac{x^2 + 5}{4} = \dfrac{55}{2}$

f) $\dfrac{(x - 2)^2}{5} - \dfrac{(x - 3)^2}{4} = 0$

g) $\dfrac{2\,x^2}{3} + \dfrac{7}{2} = \dfrac{x}{2} + 8$

h) $x = \dfrac{2}{5} + \dfrac{5\,x^2}{16}$

i) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4\,x}{5} - 19 = \dfrac{76}{5}$

j) $\dfrac{5 - 4\,x}{2} + \dfrac{3\,x^2 - 1}{3} = \dfrac{2\,x^2 + 5}{6}$

k) $\dfrac{x^2+5}{8} = \dfrac{2\,(3-x)}{5} - \dfrac{3\,(x-1)}{10}$

l) $\dfrac{x^2-10}{9} - \dfrac{3\,(4-x)}{4} = \dfrac{2\,(x-3)}{3}$

2.5.8 Résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{1}{4}\,x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\,x - \frac{3}{4}$

b) $3\,x + 8 = 2\,(x+4)$

c) $2\,x + 5 = \frac{1}{2}\,(7 - 4\,x)$

d) $\frac{1}{2}\,(8 + 2\,x) = x + 4$

e) $\dfrac{t-5}{3} = \dfrac{2-t}{2}$

f) $3\,x - \dfrac{4-x}{2} = x - \frac{1}{3}$

2.5.9 Résoudre (sans formule) les équations ci-dessous.

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 + 5\,x = 0$

c) $(x-3)^2 = 0$

d) $(x-3)^2 - 4 = 0$

e) $4\,(x+5)^2 - 9 = 0$

f) $4\,(x+5)^2 + 9 = 0$

g) $(x-p)^2 - q = 0$

h) $x^2 + 6\,x + 9 - 4 = 0$

i) $x^2 + 6\,x + 5 = 0$

j) $x^2 + 5\,x + 4 = 0$

k) $2\,x^2 + 10\,x + 8 = 0$

l) $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

2.5.10 Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 - 3\,x + 2 = 0$

b) $x^2 - 5\,x + 4 = 0$

c) $x^2 - 4\,x + 5 = 0$

d) $x^2 + 6\,x + 9 = 0$

e) $-x^2 + 30\,x - 209 = 0$

f) $2\,x^2 - 5\,x - 2 = 0$

g) $-\frac{1}{2}\,x^2 + x + 6 = 0$

h) $2\,x^2 = x + 6$

2.5.11 Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

a) $\dfrac{x-1}{2\,x-1} = \dfrac{3\,x-5}{4\,x-2}$

b) $\dfrac{x^2+x+1}{2\,x+2} = x$

c) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{3}{4} = 0$

d) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{3\,x-4}{(x-1)\cdot(x-2)}$

e) $\dfrac{750}{x}+6=\dfrac{720}{x-5}$

f) $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+6}{6-x}$

2.5.12 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $\dfrac{x-4}{x+8}=0$

b) $\dfrac{g^2-5g}{g^2-8g+15}=0$

c) $\dfrac{2x^3-8x^2-10x}{x-5}=5x$

d) $\dfrac{x+1}{x}-2x=\dfrac{x-1}{x}$

e) $\dfrac{z}{z-3}-\dfrac{2}{2-z}=\dfrac{3}{z^2-5z+6}$

f) $\dfrac{4x}{x+3}-\dfrac{x}{x-3}=-\dfrac{12}{x^2-9}$

g) $\dfrac{t}{t-2}-\dfrac{2}{t+2}=\dfrac{8}{t^2-4}$

h) $\dfrac{x+4}{x}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{4}{x^2+4x}$

i) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{5}{x^2+x}=\dfrac{4}{x^2-1}$

j) $\dfrac{x+3}{3\,x-1}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2\,x-9}{4-12\,x}+1$

2.5.13 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $1=\dfrac{3\,x}{x^2-9}-\dfrac{x}{2\,x-6}$

b) $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x-1}{2\,x}+\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{2-x}{x+1}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{2\,x+1}{3-2\,x}$

d) $\dfrac{10\,x-2}{6\,x-3}+\dfrac{3\,x+5}{4\,x^2-1}=\dfrac{x-1}{2\,x+1}$

e) $\dfrac{x-1}{x^2+x-6}+\dfrac{2\,x+1}{x^2-5\,x+6}+\dfrac{x+5}{x^2-9}=0$

f) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2}-\dfrac{x-1}{x^2-5\,x+6}+\dfrac{x-2}{x^2-4\,x+3}=0$

2.5.14 Résoudre les équations suivantes.

a) $\sqrt{7-x}=x-5$

b) $x=4+\sqrt{4\,x-19}$

c) $\sqrt{x+1}-x=x+2$

d) $x-\sqrt{-7\,x-24}=-2$

e) $\sqrt{7-2\,x}-\sqrt{5+x}=\sqrt{4+3\,x}$

f) $\sqrt{11+8\,x}+1=\sqrt{9+4\,x}$

g) $x+\sqrt{x}=20$

h) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{x}}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}=3$

i) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2\,x+3}+\sqrt{2\,x-3}$

j) $\sqrt{3\,x-5}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4\,x-5}-\sqrt{2\,x-1}$

2.5.15 Résoudre les équations suivantes.

a) $3\sqrt{2x-3}+2\sqrt{7-x}=11$

b) $\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x-5}$

2.5.16 Résoudre les équations suivantes.

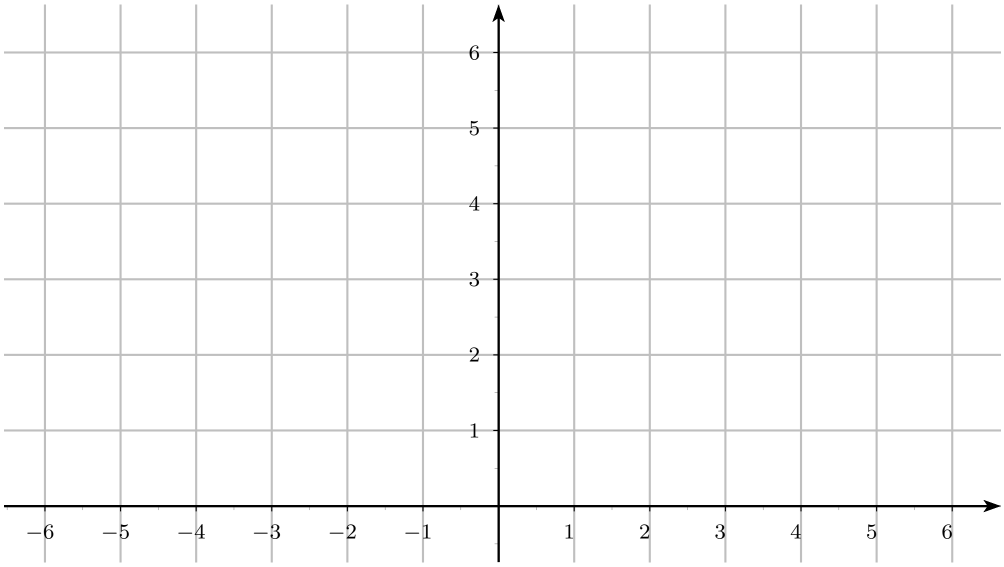
a) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=3$

b) $3x^2-5x\sqrt{3x^2-5x+4}=16$

2.5.17 Soit la fonction valeur absolue $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$f(x)=|x|.$$

a) Dans le système d'axes ci-dessous, placer une quinzaine de points qui sont sur le graphe de f.



b) Donner l'image par f de l'ensemble

$$A=\{-100;-45;-10;-9;-3;0;1;2;3;5;36;183\}$$

c) Esquisser le graphe de la fonction

$$g(x)=|x+2|$$

d) Donner l'image par la fonction

$$h(x)=|2x-5|$$

de l'ensemble

$$B=\{-1;0;1;2;3;4;5\}$$

2.5.18 Résoudre les équations suivantes.

a) $|x+4| = 11$

b) $3\,|x-2|+3 = 7$

c) $4-|x+2| = 3\,(|x-1|-1)$

d) $|2\,x+3|-|2-x| = -3$

2.5.19 Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x-y &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5\,x-2\,y &= 5 \\ 3\,x-y &= 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6\,x+4 &= -6\,y \\ 1-x &= 6\,y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\,x-4\,y &= 2 \\ x-2\,y &= 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2\,x+4\,y &= 5 \\ x+2\,y &= 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2\,x+3\,y &= 4 \\ 5\,x+6\,y &= 10 \end{cases}$

2.5.20 Pour quelle(s) valeur(s) de m le système suivant admet-il exactement une solution ?

$$\begin{cases} 2\,x+5\,y &= 32 \\ x+y &= 10 \\ 7\,x-3\,y &= m \end{cases}$$

2.5.21 Résoudre les systèmes linéaires ci-dessous :

a) $\begin{cases} 12\,x-5\,y = 29 \\ 4\,x-3\,y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+\ \ y = 19 \\ 2\,x-3\,y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12\,x+11\,y = 6 \\ 3\,y-\ 2\,x = 24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 72\,x+14\,y = 330 \\ 63\,x+\ 7\,y = 273 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2\,x+\ 3\,y = 4 \\ 3\,y+10\,x = 40 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 21\,x+\ 8\,y+66 = 0 \\ 28\,x-23\,y-13 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2\,x+3\,y+2\,z = 41 \\ 8\,x+5\,y = 31 \\ 7\,y = 21 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2\,x-3\,y+2\,z = 41 \\ 5\,x+3\,y = 10-z \\ 9\,x = 27 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 7\,x-4\,y-5\,z = 56 \\ 3\,y-2\,z = 13 \\ 5\,x-3\,y = 22 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+y+\ z = 25 \\ x-y+\ z = 5 \\ x+2\,z = 2\,y-10 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x-\ y-\ z = 6 \\ x-2\,y-3\,z = 10 \\ 5\,x+6\,y+\ z = 2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 3z-2y-x=17 \\ 2y+3z-2x=36 \\ 5x+2y-z=10 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x-y+z=29 \\ x+3y+30z=6 \\ x-y+z=17 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2x+3y+4z=47 \\ 3x+5y-4z=2 \\ 4x+7y-2z=31 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 3x+4y-z=-5 \\ x+5y-4z=-9 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y+z=10 \\ x+y-z=2 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x-y+4z=15 \\ -x+7y-6z=-27 \end{cases}$

t) $\begin{cases} x+y+z=9 \\ x+2y+3z=14 \\ 3x+2y+z=22 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 3x+4y-z=-3 \\ 2x+y-z=-1 \\ x+2y+z=1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 3x-y+4z=2 \\ 4x+y-z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

w) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \end{cases}$

y) $\begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ 3x-y+2z+5t=2 \\ 2x+2y+3z-4t=1 \end{cases}$

z) $\begin{cases} x+y+z+t+u=1 \\ x+2y+z+t+u=0 \\ x+y+3z+t+u=3 \\ x+y+z+4t+u=-2 \\ x+y+z+t+5u=5 \end{cases}$

2.5.22 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2xy-3y=3 \\ y^2-4xy=-15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x+y=30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{10} \\ x+y=11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy-(x+y)=-13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ xy+1=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2y^2-xy=30 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2+y^2-5xy=15 \\ x+y+3xy=-7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

2.5.23 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} (2\,x-y)^2-4\,(2\,x-y)=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+3\sqrt{x+y}=18 \\ x-y-2\sqrt{x-y}=15 \end{cases}$

2.6 Equations paramétriques

2.6.1 Soit la famille d'équations paramétriques donnée par

$$\frac{(m-1)\,x}{m}=3 \qquad \text{où} \quad m\in\mathbb{R}^\star$$

a) Résoudre cette équation lorsque $m=2$.
b) Résoudre cette équation lorsque $m=-2$.
c) Résoudre cette équation lorsque $m=\frac{3}{2}$.
d) Résoudre cette équation lorsque $m=1$.
e) Résoudre cette équation et donner la solution en fonction du paramètre m.

2.6.2 Résoudre les équations en x suivantes.

a) $(a-1)\,x=a+1$
b) $n\,x-x=n^2-1$
c) $m\,x-x=m^2-16$
d) $a^2\,x-a=x-1$
e) $(b^2+1)\,x=b^2-1$
f) $4\,a^2x-1=x+2\,a$
g) $2\,ax+1=4\,a^2+x$
h) $(a+b)\,x=4\,b-(b-a)\,x$
i) $(2-a+b)\,x=b\,(x-2)+2\,(x+b-3)$

2.6.3 Résoudre les équations en x suivantes en définissant le domaine de variation V du paramètre.

a) $\dfrac{1}{m}-x=\dfrac{x}{m}+m$
b) $\dfrac{x-2\,a}{a-1}+\dfrac{x}{a-a^2}=\dfrac{1-2\,a}{a}$
c) $\dfrac{x}{n-1}+\dfrac{x}{n+1}=\dfrac{1}{n^2-1}$
d) $x-1-\dfrac{x}{b+1}=\dfrac{1}{b-1}$
e) $\dfrac{x-m-4}{3m}+\dfrac{x+m}{m}=\dfrac{x+1}{3}$
f) $\dfrac{x-y}{2\,y}-1=\dfrac{y-2\,x}{3\,y}+\dfrac{x}{6}$
g) $\dfrac{x+2}{y}-\dfrac{1-xy}{y^2}=x$
h) $\dfrac{x-2}{z-1}+\dfrac{2\,x}{z+1}=3$
i) $\dfrac{x+1}{a-1}-\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{ax-1}{a^2-a}$
j) $\frac{x+1}{b^2-3\,b+2}+\frac{2\,b(3-b)}{(b-2)(b^2-1)}=\frac{x-1}{b^2-b-2}$
k) $\dfrac{x+a}{a-5}-\dfrac{a-x}{a}=\dfrac{x-a}{a+5}-\dfrac{2\,a}{5-a}$
l) $\dfrac{x-a}{a+1}-\dfrac{x+a}{a}=\dfrac{1-x}{1-a}-3$

2.6.4 Quelles valeurs doit prendre m pour que l'équation

$$(m+4)\,x^2 - 2\,(m-2)\,x + m - 4 = 0$$

admette :

a) deux racines distinctes ;

b) une racine nulle ;

c) deux racines opposées ;

d) deux racines inverses.

2.6.5 Déterminer m dans l'équation $x^2 - 5\,x + m = 0$ pour que :

a) $x' = \dfrac{1}{x''}$

b) $x' - x'' = 3$

c) $x' = 2\,x''$

d) $2\,x' - x'' = 7$

2.6.6 Déterminer m dans l'équation $8\,x^2 - (m-1)\,x + m - 7 = 0$ pour que :

a) $x' = x''$

b) $x' = -x''$

c) $x' = \dfrac{1}{x''}$

d) $x' = -\dfrac{1}{x''}$

2.6.7 Déterminer p dans l'équation $x^2 - p\,x + 36 = 0$ pour que :

a) $x' = x''$

b) $x' = -x''$

c) $x'^2 + x''^2 = 184$

d) $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{5}{12}$

2.6.8 Soit l'équation $x^2 - (m-2)\,x + (2\,m-7) = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.
Sans calculer ses solutions, déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m elle a :

a) deux solutions opposées,

b) deux solutions distinctes strictement positives,

c) une solution unique.

2.6.9 Soit l'équation $x^2 - 2\,(m-2)\,x + (2\,m-5) = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.
Sans calculer ses solutions, déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m elle a :

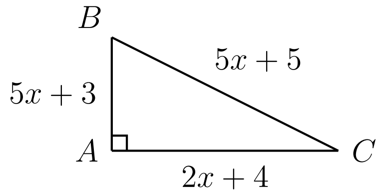
a) deux solutions opposées,

b) deux solutions distinctes strictement positives,

c) une solution négative.

2.7 Problèmes

2.7.1 On considère le triangle ABC rectangle en A dont les dimensions sont données sur la figure en fonction de x.



Quelles sont les dimensions possibles pour le triangle ABC ?

2.7.2 Trouver deux nombres positifs tels que la somme de leurs carrés soit 180 et la différence de leurs carrés 108.

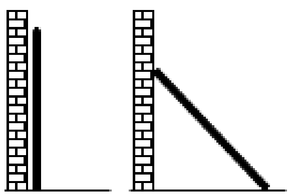
2.7.3

a) La longueur du côté d'un carré est x en cm. L'aire de ce carré augmente de 11 cm^2 si x augmente de 1 cm. Calculer x.

b) L'aire d'un carré augmente de 147 cm^2 si l'on double la longueur x de chacun de ses côtés. Déterminer x.

2.7.4

Un roseau est placé verticalement contre un mur. Si on écarte le pied de ce roseau de 45 cm du bas du mur, son sommet glisse de 15 cm vers le bas. Quelle est la longueur de ce roseau ?



2.7.5

a) On dit qu'un rectangle est de format A si, lorsqu'il est coupé en deux rectangles égaux, ces derniers sont semblables au premier (préservation du rapport des côtés).

Déterminer le rapport entre la longueur et la largeur d'un rectangle de format A.

b) Une feuille de papier A0 est une feuille de format A dont la surface mesure 1 m^2. En coupant cette feuille en deux, on obtient deux feuilles A1 ; en coupant en deux une feuille A1, on obtient deux feuilles A2 et ainsi de suite.

Déterminer, en millimètres, la longueur et la largeur d'une feuille de format A4.

2.7.6

Lorsqu'on lâche une pierre du haut d'une falaise, elle parcourt approximativement $4.9\,t^2$ mètres en t secondes. On entend l'impact 4 secondes plus tard. Sachant que la vitesse du son est d'environ 330 m/s, estimer la hauteur de la falaise.

2.7.7

La vitesse v (en mètres par seconde) d'un objet en chute libre est donnée par la fonction $v(t) = 9.8 \cdot t + v_0$ où v_0 est la vitesse initiale et t le temps (en secondes).

a) Exprimer le temps en fonction de la vitesse

b) Quelle est la vitesse de l'objet en $t = 4$ s sachant qu'au temps $t = 2$ s sa vitesse initiale était de 21 m/s ?

2.7.8

Une personne échange des pièces de 2 francs contre des pièces de 5 francs. Pour la même somme, elle a alors 102 pièces de moins qu'auparavant. Quelle est cette somme ?

2.7.9

Une bouteille et son bouchon coûtent 105 francs. La bouteille coûte 100 francs de plus que le bouchon. Quel est le prix du bouchon ? Quel est le prix de la bouteille ?

2.7.10

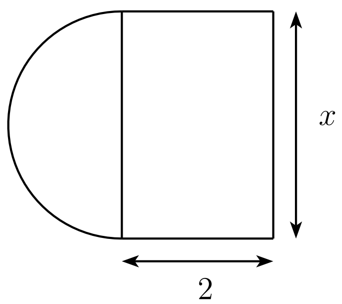
La relation entre la température c sur l'échelle Celsius et la température f sur l'échelle Fahrenheit est donnée par $c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)$.

a) Donner la température qui s'exprime par le même nombre dans les deux échelles.

b) Pour quelle température le nombre lu sur l'échelle de Fahrenheit est-il le double du nombre lu sur l'échelle de Celsius ?

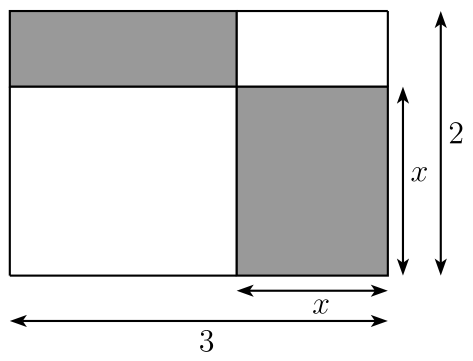
2.7.11

Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du demi-disque.



2.7.12

Pour quelle valeur de x le carré et le rectangle grisés ont-ils la même aire ?



2.7.13

On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2, et en relevant les côtés. Montrer qu'il y a deux façons de construire une telle boîte d'un volume de 1 000 cm^3.

2.7.14

Jean dit à Pierre : "Donne-moi cinq de tes billes et nous en aurons autant l'un que l'autre". Celui-ci répond : "Donne m'en dix des tiennes et j'en aurai le double de ce qu'il te restera". Combien chacun avait-il de billes ?

2.7.15

La somme des chiffres d'un nombre entier de trois chiffres est 18. Si l'on permute le premier chiffre(depuis la gauche) et le deuxième, le nombre augmente de 180. Si l'on permute le deuxième et le troisième chiffre, le nombre augmente de 18.
Quel est ce nombre ?

2.7.16

Un téléphérique pratique les tarifs suivants : montée CHF 22.50, descente CHF 15.-, aller-retour CHF 30.-. Pendant une journée, on a encaissé CHF 19650.- pour 680 montées et 520 descentes.
Combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

2.7.17

Un capital de CHF 330740.- est divisé en trois parts placées à 4%, 5% et 6%. Après une année, on ajoute les intérêts à chaque part et on remarque qu'on obtient trois fois la même somme.
Quelles étaient les parts initiales ?

2.7.18

Un libraire détient un certain stock d'un ouvrage. S'il vendait chaque exemplaire à 8 francs, il ferait un bénéfice de 90 francs. Mais, obligé de liquider le stock à moitié prix, il perd au contraire 90 francs.
Combien d'exemplaires de cet ouvrage détient-il ?

2.7.19

Un jardin rectangulaire a pour dimensions 30 m sur 20 m. Une allée de largeur uniforme fait le tour à l'intérieur.
Quelle doit être cette largeur pour que la surface de l'allée soit les $\frac{3}{8}$ de celle du rectangle entier ?

2.7.20

Les diagonales d'un losange diffèrent de 5 cm. Si l'on augmente la petite diagonale de 2 cm et que l'on diminue la grande de 3 cm, son aire diminue de 4 cm^2.
Que mesurent les diagonales de ce losange ?

2.7.21

Le périmètre d'un triangle rectangle mesure 110 m et l'un des côtés de son angle droit, 10 m.
Quelles sont les mesures des deux autres côtés de ce triangle ?

2.7.22

L'aire d'un champ rectangulaire est 31280 m^2. Si l'on augmentait chacune de ses dimensions de 1 m, l'aire serait augmentée de 472 m^2.
Quelles sont les deux dimensions ?

2.7.23

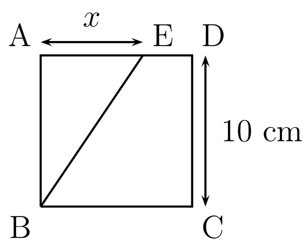
Deux réservoirs de forme cubique ont une capacité totale de 1853 l. La somme de leurs hauteurs est 1.7 m.
Combien mesure le côté de chacun d'eux ?

2.7.24 On s'attend à ce que la population P (en milliers) d'une petite ville croisse selon la formule

$$P = 15 + \sqrt{3\,t + 2}$$

où t est le temps en années. Quand la ville atteindra-t-elle 20'000 habitants ?

2.7.25

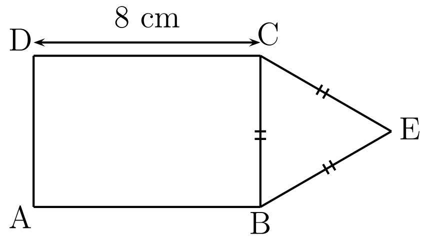


$ABCD$ est un carré et E est un point sur le segment AD. On note x, la longueur AE, exprimée en centimètres.

a) Exprimer, en fonction de x, l'aire du triangle ABE.

b) Quelle valeur faut-il donner à x pour que l'aire du triangle soit égale au quart de l'aire du carré ?

2.7.26



$ABCD$ est un rectangle.
Quelle doit-être la longueur du côté du triangle équilatéral pour que le rectangle et le triangle aient le même périmètre ?

2.8 Solutions des exercices

Développer une expression

2.1.1

a) $3 + xz + y^2$

b) $3 - xz - y^2$

c) $3xz + 3y^2$

d) $5a$

e) $-a + 2b - 2c$

f) $6a^2 - b^2 - c^2 + ab - ac + 2bc$

g) $-3x^3 - 2x^2 - 6$

h) $5x^3 - 2x^2 - 4$

i) $-4x^6 + 8x^5 + 19x^3 + 2x^2 + 5$

j) $\dfrac{21u - 7v}{12}$

k) $\dfrac{3u + 13v}{12}$

l) $\dfrac{36u^2 - 31uv - 10v^2}{48}$

2.1.2

a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $a^2 - 2ab + b^2$

c) $a^2 - b^2$

d) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

e) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

f) $a^3 - b^3$

g) $a^3 + b^3$

2.1.3

a) $a^2 + 16a + 64$

b) $y^{12} - 9y^8b + 27y^4b^2 - 27b^3$

c) $u^2 - 9$

d) $8m^3 - 125n^3$

e) $49 - 14f + f^2$

f) $64 + 96z^2 + 48z^4 + 8z^6$

g) $27 + y^9$

h) $x^4 - y^4$

i) $t^3 + 9t^2u^5 + 27tu^{10} + 27u^{15}$

j) $4x^2 - 28x + 49$

k) $b^6 - c^9$

l) $a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$

2.1.4

a) $x^2 - y^2 - 2\,x - 2\,y$

b) $4\,x$

c) $x\,y$

d) $4\,y^2$

e) $-x^2 - 6\,x\,y - 14\,y^2$

f) $-2\,x^2 - 2\,x$

g) x^2

h) $4\,x^2\,y^2 - 20\,y^4$

i) 0

j) 0

2.1.5

a) $-36\,a^2b^4 + 49\,x^6$

b) $-57\,x^2y^3 + 12\,x^4 + 49\,y^6 + 5\,y^5 + 20\,x^2y^2$

c) $-19\,x^2 - 26\,xy - 31\,y^2$

d) $8\,a^3 - 36\,a^2b + 54\,ab^2 - 4\,a^2 - 27\,b^3 + 12\,ab - 9\,b^2 - 2\,a + 3\,b$

2.1.6

a) $r(x) = 5\,x^3 - x^2 + x + 1$

b) $s(x) = 6\,x^6 + \cdots + 1\,x^4 + \cdots$

2.1.7

a) $p + q = x^3 + x^2 - x + 2$

b) $p - q = -x^3 + x^2 + 3\,x + 2$

c) $p \cdot q = x^5 + x^4 - 2\,x^2 - 4\,x$

2.1.8

a) $9\,x^4 - 24\,x^3 + 34\,x^2 - 24\,x + 9$

b) $x^4 + x^2 + x - 1$

c) 7

d) 2

e) 6

Remarque $p \cdot q = 2\,x^7 + x^6 - 15\,x^5 + 6\,x^4 + 92\,x^3 - 67\,x^2 - 157\,x + 306$

2.1.9

a) $-z$

b) $xy^2 + y^3$

c) $7\,x^3 - 2\,xy^2$

d) $5\,xy + \frac{15}{8}\,x^2y - \frac{3}{2}\,y^2$

e) $\frac{7}{12}\,x^6 - 17\,x^4 - x^2y^2$

f) $24\,x^4 - 2\,x^3 + 5\,x^2 + 7\,x - 6$

g) $x^4 + 2\,x^3 - 41\,x^2 - 42\,x + 360$

h) $6\,x^2 - 10\,x$

i) $x^3 + y^3$

j) $2\,x^2y - 4\,xy^2$

2.1.10

a) $4\,x-4$
b) $5\,x^2-13\,x+9$
c) $6\,x^2+2$
d) $-2\,x^3+6\,x^2y+4\,y^3$
e) 0
f) 0
g) $8\,x^3-30\,x^2y+36\,xy^2-54\,y^3$
h) $125\,x^6-300\,x^5y+240\,x^4y^2-64\,x^3y^3$
i) $x^6+x^4-x^2-1$
j) $4\,xy$

2.1.11 -

Factoriser une expression

2.2.1

a) $y(x+1)$
b) $a(m+p)$
c) $a^2x^2(a-x)$
d) $2u(2v-w)$
e) $2a(3a+2b)$
f) $12yz^2(2y^2z^3-3)$
g) $2yz^2(z^3+4yz^2+3y^2z-y^3)$
h) $5m^5n^2(3m^2-2n)$
i) $abc^2(3a-c)$
j) $(2x+y)(5a+8b)$
k) $ab^3c^2(3bc-1)$
l) $2u^3v(v+4v^2-3u)$
m) $3(x-3)(x-2)$
n) $(u+v)^2(u+v-1)$
o) $(a-b)(a+b)$

2.2.2

a) $(ab-m)(ab+m)$
b) $(x^2-y)(x^2+y)$
c) $\left(a-\dfrac{1}{4}\right)\left(a+\dfrac{1}{4}\right)$
d) $(a+b+x)(a+b-x)$
e) $(ax+2x-y)(ax-2x+5y)$
f) $(a-b+1)(a-b-1)$
g) $3(a+1)(a-1)$
h) $x^3(2xy+3)(2xy-3)$
i) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
j) $a(a^2+1)(a+1)(a-1)$
k) $\left(\dfrac{u^2}{25}+\dfrac{v^2}{9}\right)\left(\dfrac{u}{5}+\dfrac{v}{3}\right)\left(\dfrac{u}{5}-\dfrac{v}{3}\right)$
l) $x(x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$
m) $(a+1)^2$
n) $(1+x^2)^2$
o) $(a^2-3b)^2$
p) $(3x^2+4y)^2$

q) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

r) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$

s) $(a+b-c)^2$

t) $5(x-1)^2$

u) $(a+b)(x+1)^2$

2.2.3

a) $(x^4-5)(x^8+5x^4+25)$

b) $a\left(a-\frac{2b}{3}\right)\left(a^2+\frac{2ab}{3}+\frac{4b^2}{9}\right)$

c) $\left(3c+\frac{1}{4}\right)\left(9c^2-\frac{3}{4}c+\frac{1}{16}\right)$

d) $(z+2ab^2)(z^2-2ab^2z+4a^2b^4)$

e) $(z^2+3)(z^4-3z^2+9)$

f) $(z-2)^3$

g) $(1+3a)^3$

h) $\left(x+\frac{y}{3}\right)^3$

i) $12\left(a+\frac{b}{4}\right)^3$

2.2.4

a) $(x+2)(x+3)$

b) $(x+1)(x+4)$

c) $(u-2)(u-4)$

d) $(x-7)(x+5)$

e) $(3x+1)^2$

f) $(4z+1)(z+1)$

g) $(x-10)(x+8)$

h) $3\left(y+\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(y+\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)$

i) $(2x+1)(3x+1)$

j) $(x-17)(x-5)$

k) x^2+x+1

l) $(4u-9)^2$

m) $(5x-4)(8x+7)$

n) $(a+10)(a-1)$

o) $2\left(x-\frac{5+\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right)$

p) $(4m-3)(m+7)$

2.2.5

a) $(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$

b) $(a-2)(a^2+2a+4)(a+3)(a^2-3a+9)$

c) $(x^2+16)(x+4)(x-4)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

d) $(x+3)(x-3)(7x^2+2)$

e) $(x-1)(x^2+x+1)(4x-3)(16x^2+12x+9)$

f) $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)(2x^2+3)$

g) $(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

h) $(9x-1)(9x+1)(x^2+1)$

2.2.6

a) $(x+y)(a+b)$

b) $(a+b)(1+x+y)$

c) $(a-b)(x-y)$

d) $(a-4)(x-y)$

e) $(a+1)(x-1)$

f) $(x^2+1)(x-1)$

g) $\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{3}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$

h) $(10z-x)(x-1)$

i) $(a-b+1)(a-b-1)$

j) $(2x-3y)(2x+3y+1)$

k) $(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$

l) $(2y+1)(4y^2-2y+1)(y-1)$

m) $(x^2+1)(x-1)$

n) $(2a^3+3)(a-1)$

o) $(6x+y)(x+3z)$

2.2.7

a) $(x-2\,y)(1-2\,y)$

b) $(2\,x+3)(x-5\,y)$

c) $(1+4\,y^2)(3\,x^3-5\,z)$

d) $(2\,x+3\,y)(4+y)$

e) $\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{3}\,y\right)$

f) $\left(x^3-\frac{4}{5}\,y\right)\left(x^2-\frac{5}{4}\,z\right)$

g) $\left(\frac{2}{9}\,y^3-\frac{1}{20}\right)\left(x^2+\frac{20}{3}\right)$

h) $x^2y^3(3\,z+1)(x^2+xy-y^2)$

i) $(x^{2m}-2\,y^m)(x^{m+2}-y^{m+3})$

j) $(x^m-y^{2n})(x^{2m+1}+2\,y^{3n})$

Division euclidienne

2.3.1

a) $Q(x)=x^2-3x+1,\ R(x)=0$

b) $Q(x)=x^3-3x^2+3x-7,\ R(x)=20x-8$

c) $Q(x)=x^2-3x+3,\ R(x)=-8x+4$

d) $Q(x)=7x^2+8x+1,\ R(x)=0$

e) $Q(x)=x^6+x^5-x^3+x+1,\ R(x)=0$

f) $Q(x) = x^2 - 4x + 2$, $R(x) = x^4 - 10x$

g) $Q(x) = \dfrac{1}{2}x^3$, $R(x) = -x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 + 1$

h) $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$, $R(x) = -10$

i) $Q(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{10}{9}$, $R(x) = 0$

j) $Q(x) = x + 4$, $R(x) = 12x - 1$

2.3.2

a) $a(x) = b(x) \cdot (x^2 - 5\,x + 6)$

b) $a(x) = b(x) \cdot (-4\,x^2 - 5\,x + 2) + (46\,x)$

c) $a(x) = b(x) \cdot (-\,x^3 -\,x^2 + 4) + (-3\,x + 9)$

2.3.3

Il faut multiplier $x - 5$ par $x^2 + 2\,x + 6$.

2.3.4

Le polynôme est $10\,x^4 - 6\,x^3 + 7\,x^2 - 4\,x + 2$.

2.3.5

$P(1) = -3$; $P(3) = 35$; $P(0) = -7$; $P(-2) = -45$; $P(-3) = -103$; $P(\frac{1}{3}) = -\frac{151}{27}$; $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{21}{2}$.

2.3.6

Soit $A = t^5 - 7\,t^4 - t^2 - 9\,t + 9$, $B = t^2 - 5\,t + 4$, le quotient de A par B est $t^3 - 2\,t^2 - 14\,t - 63$, le reste étant $-268\,t + 261$.

2.3.7

$P = \frac{1}{3}(X^2 - 4X - 3)$.

2.3.8

a) $a(1) = 0$ donc le polynôme $b(x)$ divise le polynôme $a(x)$

b) $a(-2) = 132$

c) $a(0) = -7$

2.3.9

59 ; 19 ; 0.

2.3.10

a) $x - 2$

b) $3\,x^2 - x - 2$

2.3.11

a) oui ; b) non ; c) non ; d) oui ; e) oui ; f) oui ; $P(x) = (x-1)(x+1)(x+5)(x-3)$.

2.3.12
a)$1,\ 2,\ -3$; b) $-1,\ 6$.

2.3.13
a)$m=-3$ et $n=2$; b) $m=-7$ et $n=36$.

2.3.14
Je suis $x(x-2)(x+2)(x-3)(2x-1)$.

2.3.15
a)$P(x)=(x-5)(x+3)(x-1)(2x+3)$; b) $P(x)=x(x-2)(x-3)(2x+1)$.

2.3.16
$2\,x\,(x-2)^2$

2.3.17
$\frac{1}{2}$; -4 ; -3 ; 1.

2.3.18
a)$P(x)=x(x+1)(x-2)(x+3)$;
b)$P(x)=(x-2)(x+2)(x+3)(x^2+4)$;
c)$P(x)=(x-2)(x+2)(2x-1)(3x-1)$.

2.3.19

a) quotient : $x^3+2\,x^2+3\,x+4$ reste : 5
b) quotient : $x^4-x^3+x^2-x+1$ reste : 0
c) quotient : $3\,x^4-14\,x^3+35\,x^2-69\,x+133$ reste : -260

2.3.20
En effectuant la division et en trouvant 0 comme reste, ou si $f(x)=x^6-6\,x^5+15\,x^4-20\,x^3+15\,x^2-6\,x+1$, alors $f(1)=0$.

2.3.21

a) $q(x)=\frac{3}{2}\,x-\frac{1}{2},\ \ r(x)=\frac{5}{2}\,x+\frac{1}{2}$
b) $q(x)=\frac{2}{3},\ \ r(x)=\frac{2}{3}\,x^2-\frac{2}{3}\,x-\frac{5}{3}$
c) $q(x)=x^2-\frac{1}{7}\,x+1,\ \ r(x)=-\frac{1}{7}\,x^2-6\,x$
d) $q(x)=3\,x^2+2\,x+1,\ \ r(x)=6\,x+3$
e) $q(x)=7\,x^2-3\,x-1,\ \ r(x)=0$
f) $q(x)=2\,x^2-\frac{36}{7}\,x+\frac{25}{7},\ \ r(x)=-\frac{113}{7}\,x^2+\frac{151}{7}\,x-8$
g) $q(x)=-\frac{12}{5}\,x^3+\frac{11}{25}\,x^2+\frac{82}{125}\,x-\frac{141}{625},\ \ r(x)=-\frac{3058}{625}\,x-\frac{141}{625}$

2.3.22 $p(x)=(x-2)\,(x+3)\,(2x+1)$

2.3.23

a) $(x-1)\,(x+3)\,(x+7)$

b) $(x-3)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+5)$

c) $(x-2)\,(x+2)\,(x+3)\,(x^2+4)$

d) $(x-2)^2\,(x-5)\,(x+3)^2$

2.3.24

a) $p(x)=(x+18)\cdot(x+1)$

b) $p(x)=(x-2)^2$

c) $p(x)=2\,(x+3)\cdot(x-\frac{1}{2})$

d) $p(x)=3\,(x-\frac{2}{3})\cdot(x-1)$

e) $p(x)=4\,(x-\frac{5}{2})^2$

f) $p(x)=(x-3)\cdot(x+3)$

g) $p(x)=(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})\cdot$

h) $p(x)=9\,x\,(x-\frac{5}{9})\cdot$

i) $p(x)=8\,(x+\frac{1}{2})\cdot(x+\frac{1}{4})$

j) $p(x)=\frac{1}{3}\,x^2-x+4$

2.3.25

a) $x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=1$

b) $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=3$

c) $x_1=0,\ x_2=\frac{3}{2}$

d) $x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{2}$

2.3.26

a) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)=0 \qquad S=\{-3\,;\,2\}$

b) $(x-1)\,(x-2)^3=0 \qquad S=\{1\,;\,2\}$

c) $(x+1)\,(5\,x+1)\,(7\,x+1)=0 \qquad S=\{-1\,;\,-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{1}{7}\}$

d) $(x-3)\,(x+4)^2=0 \qquad S=\{-4\,;\,3\}$

2.3.27

a) $x(x+1)^2$

b) $2(a+1)^3(a-1)^3$

c) $a(3a+b)(3a-b)$

d) $2(\sqrt{3}a+1)(\sqrt{3}a-1)(9a^4+3a^2+1)$

e) $(1+x-y)(1-x+y)$

f) $(x^2+1)^2$

g) $(x+y-z)(-7x+y+z)$

h) $(x-1)(x+3)(x+7)$

i) $xy(1-3x)(1+3x)$

j) $(x+3)(x-2)(x^2+2x+4)$

k) $b(2a-b)(a+1)(a-1)$

l) $(x+2y)^3$

m) $(b-a)(b^2+ab+a^2)$

n) $3x(x-2)^3$

o) $(a^2+3b)(a^2-3b)(2x-1)(4x^2+2x+1)$

p) $(x-3)(x^2+9)$

q) $(d-2)\left(d-\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(d-\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}\right)$

r) $x(xy+1)^3$

s) $z^2x^2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

t) $(x-1)(x+1)(3x+2)(2x+3)$

u) $xy(x+1)(x+6)$

v) $2a(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

w) $(2c+1)^3$

x) $(y+b)^2(y-b)^2$

Fractions rationnelles

2.4.1

a) $\dfrac{18b}{5a^2}$

b) $\dfrac{4vw}{u}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $-\dfrac{2}{3}$

e) $\dfrac{a+b}{a-b}$

f) $\dfrac{x+4}{x-1}$

g) $\dfrac{1-x}{x(x+1)}$

h) $\dfrac{3(z-4)}{2(z-3)}$

i) $\dfrac{(x-5)^2}{x+5}$

j) $\dfrac{x^2+y^2}{x^3}$

k) $\dfrac{-2}{x(x+y)}$

l) $\dfrac{2x}{9x^2-3x+1}$

m) $\dfrac{1-x+x^2}{x}$

n) $\dfrac{x+1}{x+2}$

o) $\dfrac{x+2}{x-2}$

2.4.2

a) $\dfrac{a+1}{2}$

b) $\dfrac{x-8}{14}$

c) $x-y$

d) $-\dfrac{z+1}{z}$

e) $\dfrac{x}{x-2}$

f) $\dfrac{x}{x-1}$

g) $\dfrac{2(x-3)}{x+1}$

h) $\dfrac{2+3x}{x(x-2)}$

i) $\dfrac{u}{(u^2+4)(2+5u)}$

2.4.3

a) 2

b) $\dfrac{-6}{x+3}$

c) $\dfrac{-3}{x+2}$

d) $\dfrac{6x+11}{(3x+1)^2}$

e) $\dfrac{3a^2+2a+5}{a^3}$

f) $\dfrac{x-1}{x+1}$

g) $\dfrac{x^2-3x-6}{(x+2)(x+3)}$

h) $\dfrac{2}{(m+1)(m-1)}$

i) $-\dfrac{y+5}{(y+2)^2}$

j) $\dfrac{12x^2-19x+23}{6(x+1)(x-1)}$

2.4.4

a) $\dfrac{x-y}{x+y}$

b) $\dfrac{x}{x+y}$

c) $\dfrac{2}{x^2-1}$

d) $\dfrac{3}{x^2}$

e) $\dfrac{x^2}{x+y}$

f) 2

g) 1

h) $\dfrac{1}{x^2-4}$

2.4.5

a) $\dfrac{z+3}{z}$

b) $\dfrac{x+2}{x-2}$

c) $\dfrac{u-3}{u(1-u)}$

d) $-\dfrac{2(x-y)}{(2x+1)^2(2x-1)}$

Equations et systèmes d'équations

2.5.1

a) $S=\{-6;7\}$
b) $S=\{-7;2\}$
c) $S=\{1-3\sqrt{2};1+3\sqrt{2}\}$
d) $S=\{2-\sqrt{11};2+\sqrt{11}\}$
e) $S=\{\frac{2}{3};4\}$
f) $S=\{4;9\}$
g) $S=\emptyset$
h) $S=\{2;\frac{8}{3}\}$
i) $S=\{4;16\}$
j) $S=\{-\frac{1}{3};1\}$
k) $S=\{-5;6\}$
l) $S=\{1;2\}$
m) $S=\{2;4\}$
n) $S=\{-\frac{11}{5};2\}$
o) $S=\{\frac{5}{3};7\}$

2.5.2

$2\,x^2+7\,x-15=0 \iff x=\frac{3}{2}$ ou $x=-5$
$2\,x^2+7\,x-15=(2\,x-3)(x+5)$

a) $(x-4)(2\,x+1)$
b) $(2\,x+1)(3\,x+4)$
c) $(x-5)(6\,x+5)$
d) Pas factorisable
e) $(3\,x+8)(4\,x-3)$
f) $(5\,x-2)(x+\frac{7}{3})$

2.5.3

a) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
b) $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$
c) $\mathcal{S} = \{2; 11\}$
d) $\mathcal{S} = \{-5; -2; 3\}$
e) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1; 2\}$
f) $\mathcal{S} = \{1\}$
g) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 2\}$
h) $\mathcal{S} = \{1; 3\}$
i) $\mathcal{S} = \{-5; -4\}$
j) $\mathcal{S} = \{2; -1; 1\}$

2.5.4

a) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 6\}$
b) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 3\}$
c) $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$
d) $\mathcal{S} = \{-\frac{2}{7}; 0; \frac{1}{4}\}$
e) $\mathcal{S} = \{\frac{3}{2}; 2\}$
f) $\mathcal{S} = \{-4; 0; 6\}$
g) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
h) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{3}; 3\}$

2.5.5 $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$

2.5.6

a) $x_1 = -3$, $x_{2,3} = \pm 2$, $x_4 = 3$
b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
c) Pas de solution
d) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
e) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$
f) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$
g) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$

2.5.7

a) $5\,x^2 + 3\,x - 39 = 0$, $\Delta = 789$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-3-\sqrt{789}}{10}; \dfrac{-3+\sqrt{789}}{10}\right\}$
b) $5\,x^2 + 21\,x - 164 = 0$, $\Delta = 3721 = 61^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{41}{5}; 4\}$
c) $x^2 + 8\,x - 9 = 0$, $\Delta = 10^2$, $\mathcal{S} = \{-9; 1\}$
d) $0 = 0$, indéterminé, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
e) $2\,x^2 - 3\,x + 229 = 0$, $\Delta = -1823$, impossible, $\mathcal{S} = \emptyset$
f) $x^2 - 14\,x + 29 = 0$, $\Delta = 80 = 16 \cdot 5$, $\mathcal{S} = \{7 - 2\sqrt{5}; 7 + 2\sqrt{5}\}$
g) $4\,x^2 - 3\,x - 27 = 0$, $\Delta = 441 = 21^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{9}{4}; 3\}$
h) $25\,x^2 - 80\,x + 32 = 0$, $\Delta = 3200 = 1600 \cdot 2$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{8-4\sqrt{2}}{5}; \dfrac{8+4\sqrt{2}}{5}\right\}$
i) $5\,x^2 + 12\,x - 513 = 0$, $\Delta = 10404 = 102^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{57}{5}; 9\}$
j) $x^2 - 3\,x + 2 = 0$, $\Delta = 1$, $\mathcal{S} = \{1; 2\}$
k) $5\,x^2 + 28\,x - 35 = 0$, $\Delta = 1484 = 4 \cdot 371$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-14-\sqrt{371}}{5}; \dfrac{-14+\sqrt{371}}{5}\right\}$
l) $4\,x^2 + 3\,x - 76 = 0$, $\Delta = 1225 = 35^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{19}{4}; 4\}$

2.5.8

a) $\mathcal{S} = \{-23\}$
b) $\mathcal{S} = \{0\}$
c) $\mathcal{S} = \{\frac{-3}{8}\}$
d) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
e) $\mathcal{S} = \{\frac{16}{5}\}$
f) $\mathcal{S} = \{\frac{2}{3}\}$

2.5.9

a) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$
b) $x_1 = -5$, $x_2 = 0$
c) $x = 3$
d) $x_1 = 1$, $x_2 = 5$
e) $x_1 = -\frac{13}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$
f) Pas de solution
g) $x_1 = p - \sqrt{q}$, $x_2 = p + \sqrt{q}$ si $q > 0$
h) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$
i) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$
j) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$
k) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$
l) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$ si $b^2 - 4\,a\,c$

2.5.10

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
b) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$
c) Pas de solution
d) $x = -3$
e) $x_1 = 11$, $x_2 = 19$
f) $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$
g) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$
h) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$

2.5.11

a) $x_1 = 3$
b) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
c) $x_1 = -5$, $x_2 = -\frac{5}{3}$
d) $x_1 = 4$
e) $x_1 = -25$, $x_2 = 25$
f) $x_1 = -3$, $x_2 = 18$

2.5.12

a) $S = \{4\}$
b) $S = \{0\}$
c) $S = \{0; \frac{3}{2}\}$
d) $S = \{-1; 1\}$
e) $S = \{-3\}$
f) $S = \{1; 4\}$
g) $S = \emptyset$
h) $S = \{-3\}$
i) $S = \{2\}$
j) $S = \{2\}$

2.5.13

a) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$, $S = \{-2\}$

b) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 0\}$, $S = \{1; 6\}$

c) $ED = \mathbb{R} - \{-1; \frac{3}{2}\}$, $S = \{0; \frac{7}{2}\}$

d) $ED = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$, $S = \{-1; -\frac{5}{7}\}$

e) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 2; 3\}$, $S = \{-2; \frac{1}{2}\}$

f) $ED = \mathbb{R} - \{1; 2; 3\}$, $S = \{6\}$

2.5.14

a) $x = 6$
b) $x_1 = 5$, $x_2 = 7$
c) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{3}{4}$
d) Pas de solution
e) $x = -1$
f) $x = -\frac{5}{4}$
g) $x = 16$
h) $x = \frac{3}{4}$
i) Pas de solution
j) $x = 2$

2.5.15

a) $x = 6$
b) $x = 3$

2.5.16

a) $x = \frac{5}{3}$
b) $x = 3$ ou $x = -\frac{4}{3}$

2.5.17

a) –
b) $f(A) = \{100; 45; 10; 9; 3; 0; 1; 2; 3; 5; 36; 183\}$
c) –
d) $h(B) = \{7; 5; 3; 1; 1; 3; 5\}$

2.5.18

a) $x = 7$ ou $x = -15$
b) $x = \frac{2}{3}$ ou $x = \frac{10}{3}$
c) $x = -1$ ou $x = 2$
d) $x = -2$ ou $x = -\frac{4}{3}$

2.5.19

a) $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
b) $(x; y) = (15; 35)$
c) $(x; y) = \left(-1; \frac{1}{3}\right)$
d) $(x; y) = (2\,t + 1; t)\,, t \in \mathbb{R}$
e) Aucune solution
f) $(x; y) = (2; 0)$

2.5.20 $m = 30$

2.5.21

a) $(x;y) = (2;-1)$
b) $(x;y) = (\frac{68}{5};\frac{27}{5})$
c) $(x;y) = (-123/29;150/29)$
d) $(x;y) = (4;3)$
e) $(x;y) = (9/2;-5/3)$
f) $(x;y) = (-2;-3)$
g) $(x;y;z) = (2;3;14)$
h) $(x;y;z) = (3;-5;10)$
i) $(x;y;z) = (5;1;-5)$
j) $(x;y;z) = (20;10;-5)$
k) $(x;y;z) = (3;-2;-1)$
l) $(x;y;z) = (28/15;313/60;293/30)$
m) $(x;y;z) = (6;-10;1)$
n) $(x;y;z) = (-39/5;11;37/5)$
o) $(x;y;z) = (1;2;3)$
p) $(x;y;z) = (7\,t;16\,t;13\,t), t \in \mathbb{R}$
q) $(x;y;z) = (1-t;t-2;t), t \in \mathbb{R}$
r) $(x;y;z) = (1;6;5)$
s) $(x;y;z) = (13-11\,t;t-2;3\,t), t \in \mathbb{R}$
t) $(x;y;z) = (t+4;5-2\,t;t), t \in \mathbb{R}$
u) $(x;y;z) = (1;-1;2)$
v) Le système n'a pas de solution.

w) $(x;y;z) = (7/4-3\,t;9/4-5\,t;4\,t), t \in \mathbb{R}$
x) $(x;y;z;t) = (2\,u-5\,v;3\,u-4\,v;7\,u;7\,v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$
y) Le système n'a pas de solution.
z) $(x;y;z;t;u) = (1;-1;1;-1;1)$

2.5.22

a) $(x;y) = (2;3)$
b) $(x;y) = (-60;90)$ ou $(18;12)$
c) $(x;y) = (1;10)$ ou $(10;1)$
d) $(x;y) = (-5;3)$ ou $(3;-5)$ ou $(2+\sqrt{13};2-\sqrt{13})$ ou $(2-\sqrt{13};2+\sqrt{13})$
e) $(x;y) = (-1;1)$ ou $(1;-1)$
f) $(x;y) = (3;2)$ ou $\left(\sqrt{2.5\cdot(\sqrt{5}-1)};-\sqrt{2.5\cdot(\sqrt{5}+1)}\right)$ ou $(-3;-2)$
ou $\left(-\sqrt{2.5\cdot(\sqrt{5}-1)};\sqrt{2.5\cdot(\sqrt{5}+1)}\right)$
g) $(x;y) = (1;-2)$ ou $\left(\dfrac{\sqrt{21}-2}{3};\dfrac{-\sqrt{21}-2}{3}\right)$ ou $(-2;1)$ ou $\left(\dfrac{-\sqrt{21}-2}{3};\dfrac{\sqrt{21}-2}{3}\right)$
h) $(x;y) = (5;4)$

2.5.23

a) $(x;y) = (2;-1)$ ou $(\frac{14}{3};\frac{13}{3})$
b) $(x;y) = (17;-8)$

Equations paramétriques

2.6.1

a) $S = \{6\}$ b) $S = \{2\}$ c) $S = \{9\}$ d) $S = \emptyset$

e) Avec la condition $m \in \mathbb{R}^\star - \{1\}$, $S = \left\{\dfrac{3\,m}{m-1}\right\}$

2.6.2

a) $(a-1)\,x = a+1$

1) $a \neq 1$ $\quad S = \left\{\dfrac{a+1}{a-1}\right\}$

2) $a = 1$ $\quad S = \emptyset$

b) $(n-1)\,x = n^2-1$

1) $n \neq 1$ $\quad S = \{n+1\}$

2) $n = 1$ $\quad S = \mathbb{R}$

c) $(m-4)\,x = m^2-16$

1) $m \neq 4$ $\quad S = \{m+4\}$

2) $m = 4$ $\quad S = \mathbb{R}$

d) $(a^2-1)\,x = a-1$

1) $a \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ $\quad S = \left\{\dfrac{1}{a+1}\right\}$

2) $a \in \{-1; 1\}$

i) $a = 1$ $\quad S = \mathbb{R}$

ii) $a = -1$ $\quad S = \emptyset$

e) $(b^2+1)\,x = b^2-1$ $\quad S = \left\{\dfrac{b^2-1}{b^2+1}\right\}$

f) $(4\,a^2-1)\,x = 2\,a+1$

1) $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$ $\quad S = \left\{\dfrac{1}{2\,a-1}\right\}$

2) $a \in \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

i) $a = \frac{1}{2}$ $\quad S = \emptyset$

ii) $a = -1$ $\quad S = \mathbb{R}$

g) $(2\,a-1)\,x = 4\,a^2-1$

1) $a \neq \frac{1}{2}$ $\quad S = \{2\,a+1\}$

2) $a = \frac{1}{2}$ $\quad S = \mathbb{R}$

h) $2\,bx = 4\,b$

1) $b \neq 0$ $\quad S = \{2\}$

2) $b = 0$ $\quad S = \mathbb{R}$

i) $ax = 6$

1) $a \neq 0$ $\quad S = \left\{ \dfrac{6}{a} \right\}$

2) $a = 0$ $\quad S = \emptyset$

2.6.3

a) $V = \mathbb{R}^\star$

$(m+1)\,x = 1 - m^2$

1) $m \neq -1$ $\quad S = \{1 - m\}$

2) $m = -1$ $\quad S = \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R} - \{0; 1\}$

$(a-1)\,x = 3\,a - 1$ $\quad S = \left\{ \dfrac{3\,a-1}{a-1} \right\}$

c) $V = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$2\,nx = 1$

1) $n \neq 0$ $\quad S = \left\{ \dfrac{1}{2\,n} \right\}$

2) $n = 0$ $\quad S = \emptyset$

d) $V = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$(b^2 - b)\,x = b^2 + b$

1) $b \neq 0$ $\quad S = \left\{ \dfrac{b+1}{b-1} \right\}$

2) $b = 0$ $\quad S = \mathbb{R}$

e) $V = \mathbb{R}^\star$

$(m-4)\,x = m - 4$

1) $m \neq 4$ $\quad S = \{1\}$

2) $m = 4$ $\quad S = \mathbb{R}$

f) $V = \mathbb{R}^\star$

$(7-y)x = 11y$

1) $y \neq 7$ $\quad S = \left\{ \dfrac{11\,y}{7-y} \right\}$

2) $y = 7$ $\quad S = \emptyset$

g) $V = \mathbb{R}^\star$

$(y^2 - 2\,y)x = 2\,y - 1$

1) $y \neq 2$ $\quad S = \left\{ \dfrac{2\,y-1}{y^2-2\,y} \right\}$

2) $y = 2$ $\quad S = \emptyset$

h) $V = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$(3\,z - 1)x = 3\,z^2 + 2\,z - 1$

1) $z \neq \frac{1}{3}$ $\quad S = \{z + 1\}$

2) $z = \frac{1}{3}$ $\quad S = \mathbb{R}$

i) $V=\mathbb{R}-\{0;1\}$

$(a-1)x=2\,a$ $\qquad S=\left\{\dfrac{2\,a}{a-1}\right\}$

j) $V=\mathbb{R}-\{-1;1;2\}$

$2\,x=2\,b^2-8\,b$ $\qquad S=\{b^2-4\,b\}$

k) $V=\mathbb{R}-\{-5;0;5\}$

$(a^2+10\,a-25)\,x=a^3+10\,a^2-25\,a$

1) $a^2+10\,a-25\neq 0$ $\qquad S=\{a\}$

2) $a^2+10\,a-25=0$ $\qquad S=\mathbb{R}$

l) $V=\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$

$(a^2+2\,a-1)\,x=a^3+2\,a^2-a$

1) $a^2+2\,a-1\neq 0$ $\qquad S=\{a\}$

2) $a^2+2\,a-1=0$ $\qquad S=\mathbb{R}$

2.6.4

a) $m<5$ avec $m\neq -4$

b) $m=4$

c) $m=2$

d) Il n'y a jamais deux racines inverses

2.6.5

a) $m=1$

b) $m=4$

c) $m=\frac{50}{9}$

d) $m=4$

2.6.6

a) $m=9$ ou $m=25$

b) $m=1$

c) Pas de solution

d) $m=-1$

2.6.7

a) $p=\pm 12$

b) Pas de solution

c) $p=\pm 16$

d) $p=15$

2.6.8

a) $m=2$

b) $m\in]\frac{7}{2};4[\cup]8;+\infty[$

c) $m=4$ ou $m=8$

2.6.9

a) $m=2$

b) $m\in]\frac{5}{2};3[\cup]3;+\infty[$

c) impossible

Problèmes

2.7.1 On trouve $x = 0$ et $x = 1$. Les triangles ont pour dimensions 3, 4, 5 et 6, 8, 10.

2.7.2
Les deux nombres cherchés sont 6 et 12.

2.7.3

a) $x = 5$

b) $x = 7$

2.7.4
$x = 75cm$

2.7.5

a) $\sqrt{2}$

b) 297.3×210.2

2.7.6
70.27 m

2.7.7

a) $t(v) = \dfrac{(v - v_0)}{9.8}$

b) 40.6 m/s

2.7.8
La somme est égale à 340 francs.

2.7.9
La bouteille coûte 102.50 francs et le bouchon coûte 2.50 francs.

2.7.10

a) -40

b) 160 °C

2.7.11
$x < \frac{16}{\pi}$

2.7.12
$x = \frac{6}{5}$

2.7.13
En choisissant $x = 5$ ou $x = 5\,(2 - \sqrt{2})$

2.7.14
Jean avait 40 billes et Pierre avait 50 billes.

2.7.15
Le nombre est 468.

2.7.16
220 montées, 60 descentes et 460 aller-retour.

2.7.17
CHF 111300.- ; CHF 110240.- ; CHF 109200.-

2.7.18
Il détient 45 ouvrages.

2.7.19
La largeur de l'allée est de 2.5 m.

2.7.20
Les diagonales de ce losange mesurent 12 cm et 17 cm.

2.7.21
Les deux autres côtés du triangle mesurent 49.5 m et 50.5 m.

2.7.22
Les deux dimensions sont 391 m et 80 m.

2.7.23
Le côté du premier réservoir mesure 1.2 m ; celui du second mesure 0.5 m.

2.7.24
Après $t = \frac{23}{3}$ ans

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Quelques démonstrations

3.1.1 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$, alors $a \leq \frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{a\,b} \leq b$.

3.1.2 (Raisonnement par l'absurde) Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit : "Je passerai peut être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres." Or, j'ai été obligé de sortir lundi après-midi. En rentrant chez moi, je constate qu'il n'y a pas de mot dans la boîte aux lettres...
Pierre est-il passé chez moi ce lundi après-midi ?
Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}) \Longrightarrow \left(\frac{x+1}{x+2} \neq 1\right)$$

3.1.3 En raisonnant par l'absurde, montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3.1.4 Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Utiliser le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

3.1.5 Sachant que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier, montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

3.1.6 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n > 3$, l'expression $n^2 - n - 6$ est un nombre pair.

3.1.7 Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sin(x)$.

3.1.8 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(x^2 \leq x \Longrightarrow |x| = x)$.

3.1.9 Soit $z \in \mathbb{Z}$. Montrer que (z^2 impair $\Longrightarrow$ z impair)).

3.1.10 Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x < 2 \Longrightarrow x^2 < 4)$?

3.1.11 Démontrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, le nombre $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

3.1.12 Écrire avec des *quantificateurs* les propositions suivantes :

a) f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

b) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

3.2 Ensembles et intervalles

3.2.1 Soit A une partie de $\mathbb{N}$ définie par

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Donner en notation énumérative les parties suivantes de A :

a) $B = \{x \in A \mid x \text{ est un multiple de } 3\}$.

b) $C = \{x \in A \mid x \text{ est un diviseur de } 24\}$.

c) $B \cap C$, $B - C$, $\complement_A(B) \cap \complement_A(C)$.

3.2.2 Expliciter les ensembles suivants :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N} : (x^2 = y^2)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| = 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+3| \leq 2\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}$

3.2.3 Soit l'ensemble

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

Trouver une partition de E comprenant 4 parties A, B, C, D telles que :

- $A \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$
- $C \cup B = \{4; 5; 7\}$
- $E \cap D = \{6; 8; 9; 10\}$

3.2.4 Déterminer la partie E de $\mathbb{N}$ qui satisfait aux conditions :
- $E \subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $E \subseteq \{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$
- $\{1; 3; 4; 6\} \subseteq E$

3.2.5 Déterminer les sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ qui remplissent les conditions :
- $A \cup B =\subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $A \cap B = \emptyset$
- $\forall x \in A,\ \exists y \in B$ de sorte que $x - y = 1$ et $\forall y \in B,\ \exists x \in A$ de sorte que $x - y = 1$.

3.2.6 Trouver les parties A, B et C de $\mathbb{N}$ qui remplissent les conditions :
- $1 \in A$
- $\{2; 4\} \cap B = \emptyset$
- $3 \in A \cap B \cap C$
- $4 \in A \cap C$
- $A \cap B \nsubseteq C$
- $B \cup C \nsubseteq A$
- $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$

3.2.7 Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 5\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x < 5\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 10\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2 \text{ et } x \leqslant 2\}$
f) $F = \mathbb{R}$
g) $G = \{2\}$

3.2.8 Trouver deux ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ tels que

a) $A \cup B = \{0\ ; 1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\}$ et $A \cap B = \{\ \}$
b) $A \cup B = \{0\ ; 1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\}$ et $A \cap B = \{2\ ; 3\ ; 4\}$

3.2.9 On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$. Déterminer $I \cap J$, $I \cap K$, $I - (J \cup K)$, $(I - J) \cup (I - K)$ dans les cas suivants.

a) $I = [-3\ ;\ 4[\qquad J = [-2\ ;\ 0[\qquad K =]-5\ ;\ 3]$
b) $I =]-4\ ;\ 2] \qquad J = [-2\ ;\ 3] \qquad K =]-3\ ;\ 1[$
c) $I =]-5\ ;\ 3[\qquad J =]-1\ ;\ 5] \qquad K = [-3\ ;\ 4]$

3.3 Généralités sur les fonctions

3.3.1 Soit $D = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. On considère les fonction suivantes de D dans $\mathbb{Q}$. Énumérer les éléments de $f(D)$.

a) $f\colon x \longmapsto 3\,x - 5$

b) $f\colon x \longmapsto x^2 - 3$

c) $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x+4} - 1$

d) $f\colon x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$

3.3.2 Les correspondances suivantes sont-elles des fonctions ?
Justifier les réponses.

a) $a : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 3\,x-2 \end{array}$

b) $b : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 5\,x-7 \end{array}$

c) $c : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-3} \end{array}$

d) $d : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$

e) $e : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 5\,x^2-5 \end{array}$

f) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$

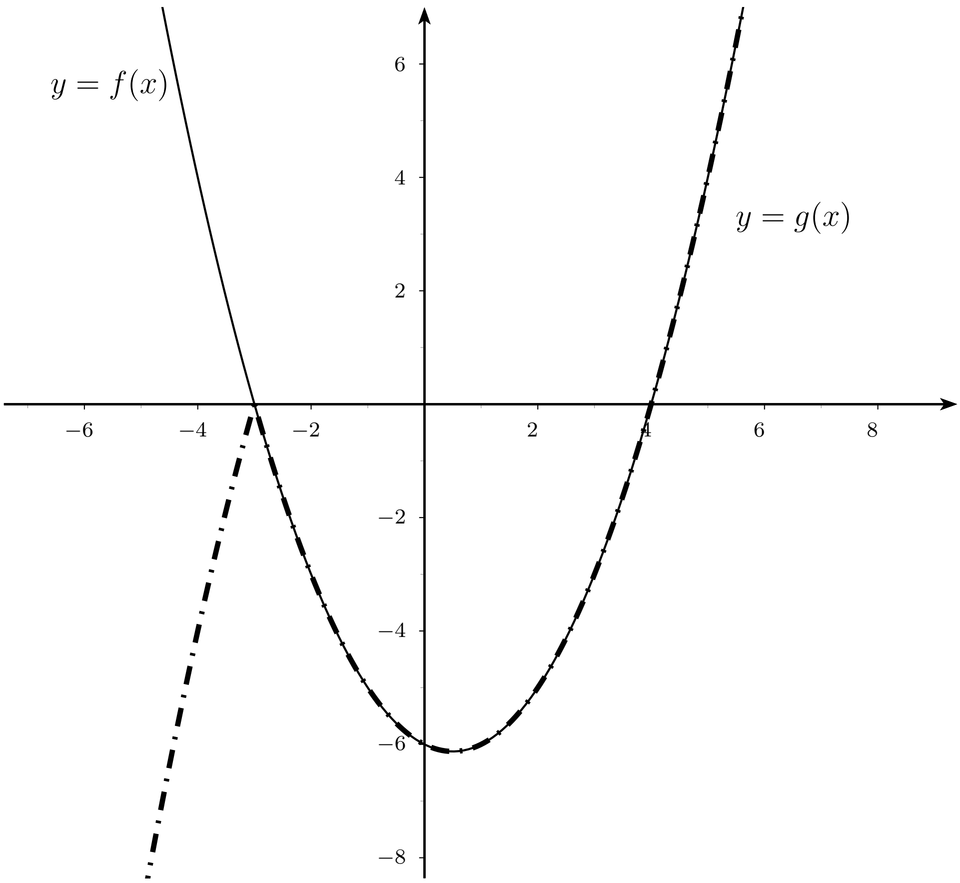
g) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

h) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$

i) $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array}$

j) $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$

3.3.3 On donne les fonctions f et g ci-dessous par leur graphe. Le graphe de la fonction f est représenté par un filet mince tandis que celui de g est tracé en trait interrompu épais.

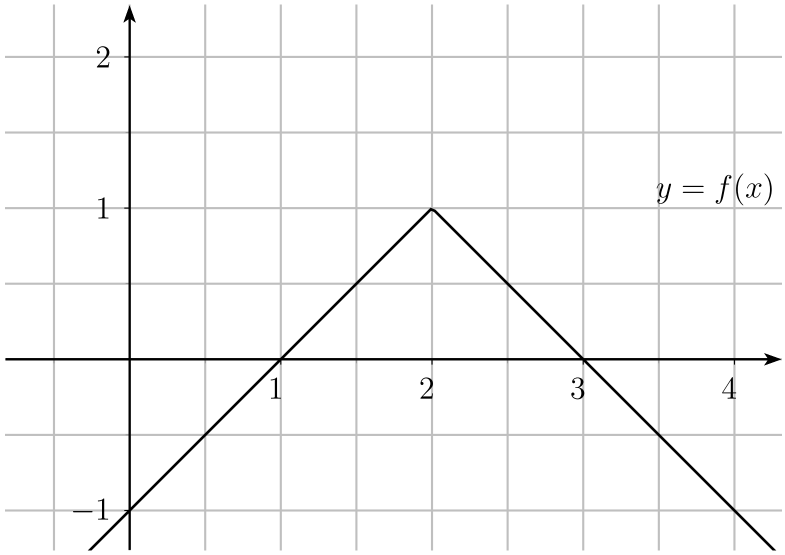


Peut-on dire que g soit définie par l'expression mathématique suivante ?

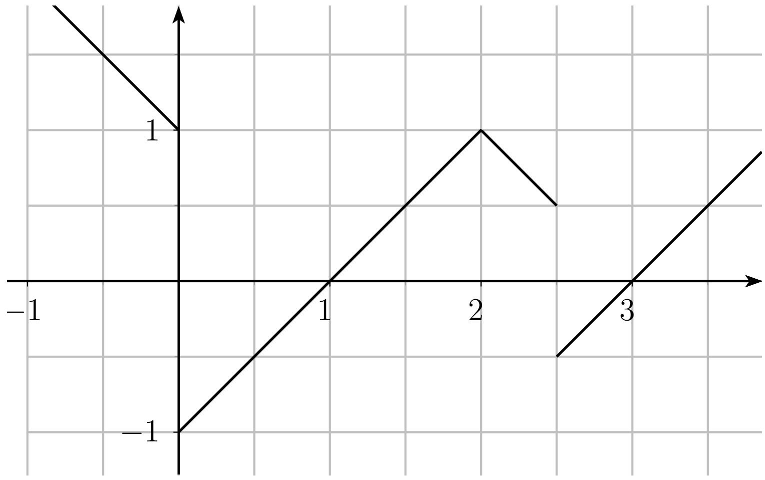
$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Justifier la réponse. Si vous répondez par la négative, donnez une expression mathématique qui définit g à partir de f.

3.3.4 On donne la fonctions f ci-dessous par son graphe.



Soit encore le graphe de la fonction g :



Peut-on dire que g soit définie par l'expression mathématique suivante ?

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \in [0; 2.5] \\ -f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

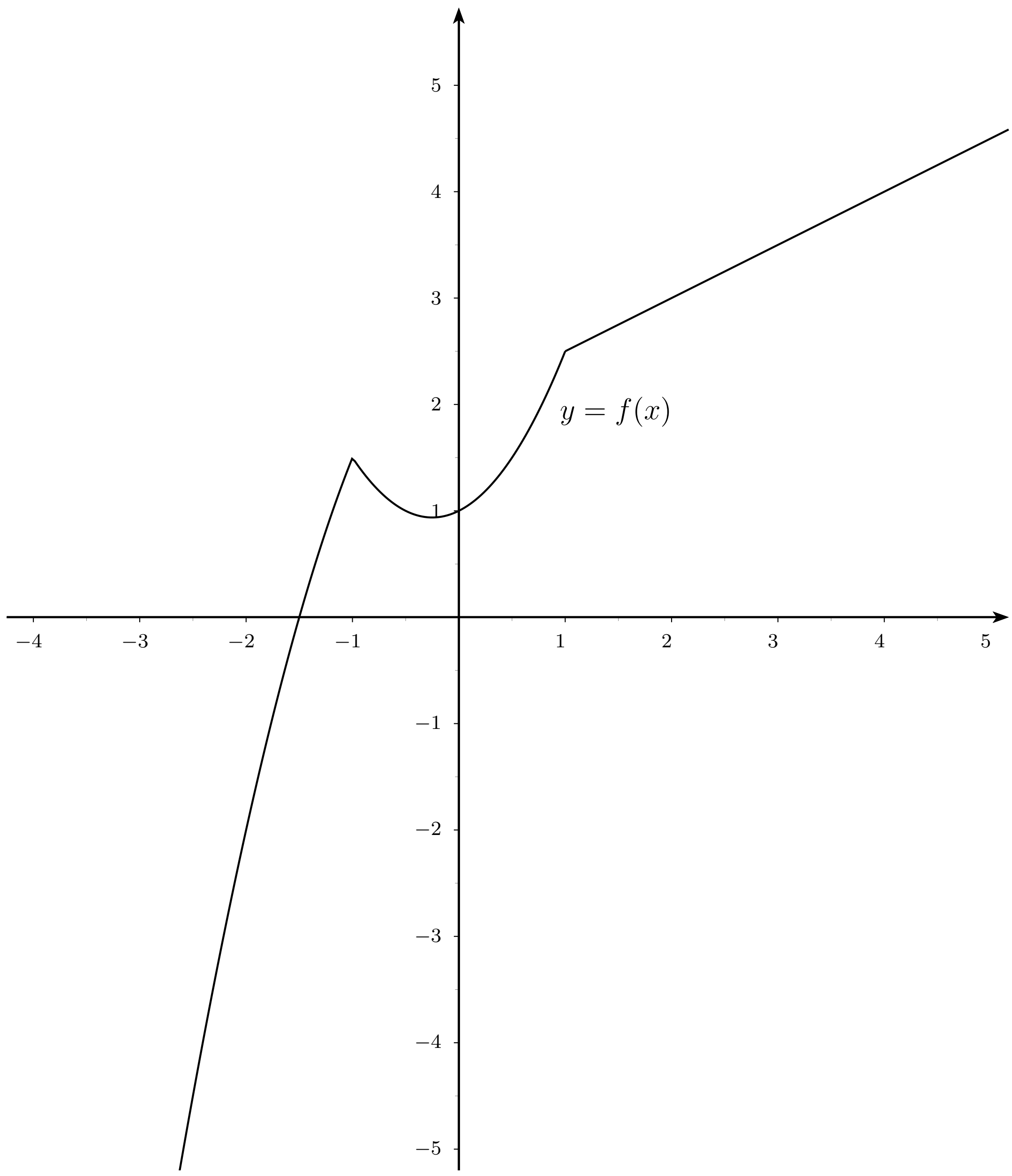
a) Justifier la réponse.

b) Définir g par morceaux à partir de f.

c) Esquisser le graphe de la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

3.3.5 On considère une fonction $f(x)$ définie par morceaux dont le graphe est tracé ci-dessous :



Cette fonction a été construite à partir de deux arcs de paraboles et d'une partie d'une fonction affine. On sait que la fonction f est continue, à savoir qu'on peut la tracer sans lever le crayon. À partir des informations ci-dessous, écrire par morceaux l'expression mathématique de f :

a) les expressions mathématiques des deux arcs de parabole sont :

$$x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{et} \quad -x^2 + \frac{x}{2} + 3$$

b) la pente de la partie affine de la fonction f vaut $1/2$.

3.4 Etude d'une fonction

3.4.1 Déterminer l'ensemble de définition D des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{5+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2+9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\,x}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2-7}{(x-3)(x+4)}$

h) $f(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

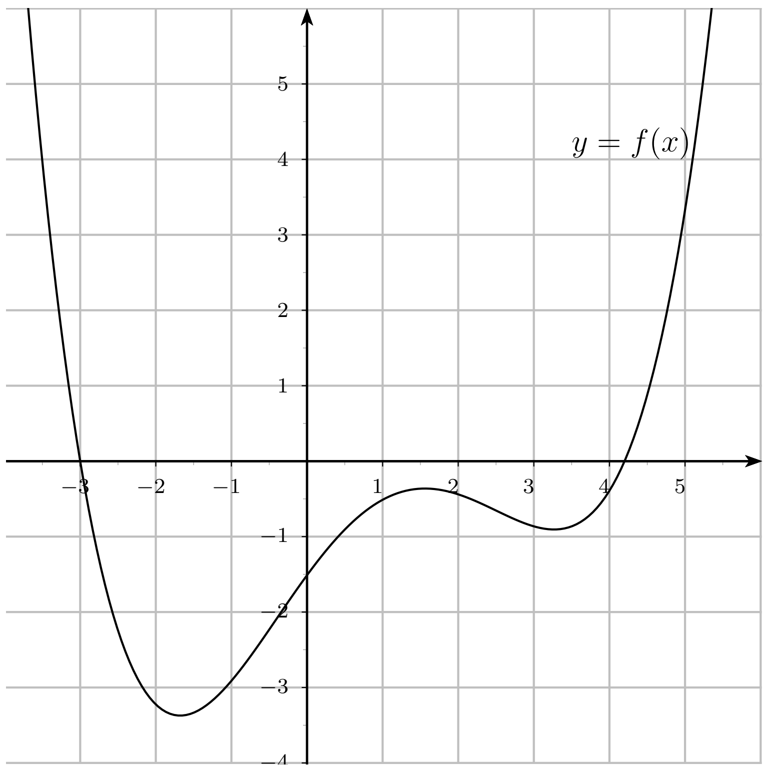
i) $f(x) = \sqrt{x-1}$

j) $f(x) = \dfrac{5\,x}{\sqrt{x+5}}$

k) $f(x) = \sqrt{2-x}$

l) $f(x) = \sqrt{1-2\,x}$

3.4.2 La fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(-2)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$;

d) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

e) les valeurs de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution. Quelle est alors cette solution ?

f) les valeurs de x sachant que $f(x) = x$;

g) les valeurs de x sachant que $f(x) = -x$;

3.4.3 Dessiner les graphes des fonctions

$$f(x) = -2\,x + 6 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\,x - 3$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = g(x)$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) < 0$

e) $f(x) > g(x)$

f) $f(x) \geq x$

3.4.4 Dessiner les graphes des fonctions affines f telles que :

a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut -2

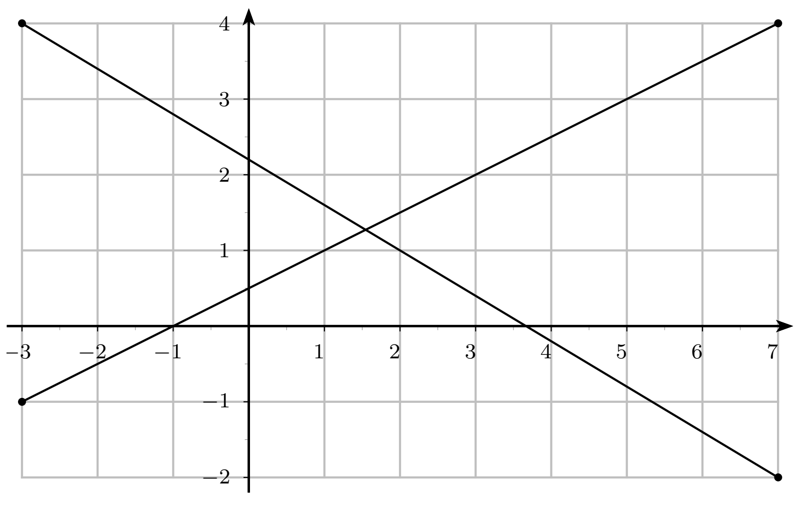
b) $f(0) = -1$ et la pente du graphe de f vaut $\frac{3}{2}$

c) $f(2) = 0$ et la pente du graphe de f vaut $-\frac{3}{5}$

d) $f(3) = 1$ et la pente du graphe de f vaut 1

e) $f(4) = 5$ et la pente du graphe de f vaut 0

3.4.5

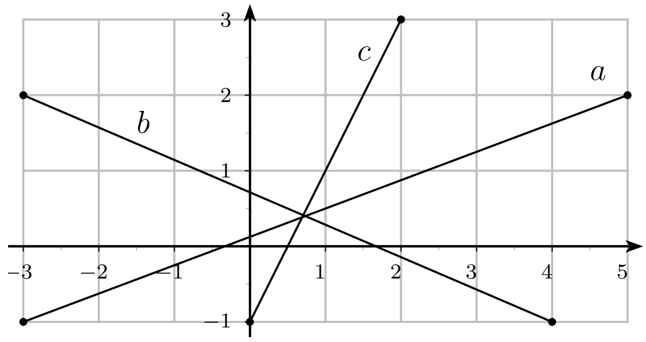


a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-dessus.

b) Trouver la fonction f dont le graphe est une droite qui passe par l'origine et par le point I.

c) Trouver la fonction g dont le graphe est une droite parallèle au graphe de f et qui passe par le point $P(2;-1)$.

3.4.6 Les trois droites a, b et c se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



3.4.7 Dessiner les graphes des fonctions f suivantes

a) $f(x) = x^2 - 4\,x$

b) $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 2$

c) $f(x) = -x^2 + 4$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - x + 4$

3.4.8 Etudier le signe des trinômes.

a) $6\,x^2 - x - 2$

b) $8\,x^2 - 10x + 3$

c) $-x^2 + 6\,x - 9$

d) $-2\,x^2 + 7\,x + 4$

e) $25\,x^2 - 30\,x + 34$

f) $-3\,x^2 + 24\,x - 60$

g) $6\,x^2$

h) $6\,x^2 + 7\,x$

i) $8\,x^2 - 25$

j) $9\,x^2 - 42\,x + 9$

3.4.9 La hauteur h (en m) au-dessus du sol d'une fusée jouet t secondes après son lancement est donnée par $h(t) = -16\,t^2 + 120\,t$.
Quand la fusée sera-t-elle à 180 m du sol ?

3.4.10 Un train quitte une gare à 12h00 et voyage vers l'est à une vitesse de 30 km/h. A 14h00 le même jour, un deuxième train quitte la gare et voyage vers le sud à une vitesse de 25 km/h.

Trouver la fonction qui exprime la distance d en km entre les deux trains en fonction du temps t en heures, t désignant le temps pendant lequel le second train a voyagé.

3.4.11 Une balle de baseball est lancée verticalement avec une vitesse initiale de 64 m/s. Le nombre de mètre au-dessus du sol après t secondes est donné par $s(t) = -16\,t^2 + 64\,t$.

a) Quand la balle sera-t-elle à 48 m au-dessus du sol ?

b) Quand touchera-t-elle le sol ?

3.4.12 La distance qu'une voiture parcourt entre le moment où le conducteur décide de freiner et celui où la voiture s'arrête est appelée la distance de freinage. Pour une certaine voiture circulant à v km/h, la distance de freinage d (en m) est donnée par $d(v) = v + \dfrac{v^2}{20}$.

a) Calculer la distance de freinage quand v vaut 55km/h.

b) Si un conducteur décide de freiner 120 m avant un signal stop, à quelle vitesse doit-il rouler pour s'arrêter au bon endroit ?

3.4.13 Un objet est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de v m/s ; après t secondes il est à une distance s donnée par la fonction $s(t) = v\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$.
Si $g = 9.8$ m/s^2 et si la vitesse initiale est de 120 m/s, trouver :

a) le temps que met l'objet pour s'élever à 60 m au-dessus du sol

b) la hauteur maximale atteinte par l'objet et le temps requis

3.4.14 Calculer l'intersection des graphes de $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x + 3$ et de $g(x) = 3\,x^2 - 12\,x + 18$.

3.4.15 Dessiner les graphes des fonctions

$$f(x) = x^2 - x - 6 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 2\,x - 2$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations ci-dessous.

a) $f(x) = 0$

b) $g(x) = 0$

c) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) > 0$

e) $f(x) < 0$

f) $g(x) \geq 0$

g) $g(x) \leq 0$

h) $f(x) < g(x)$

i) $g(x) \leq -2$

3.4.16 Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole

a) de sommet $S(2;5)$ et dont le graphe passe par le point $A(4;-1)$;

b) qui coupe l'axe Ox en $x=-3$ et $x=1$ et qui est tangente à la droite d'équation $y=8$;

c) qui coupe l'axe Ox en $x=-3$ et $x=1$ et qui est tangente à la droite d'équation $y=-1$;

3.4.17 Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole de sommet $S(1;2)$ tangente à la droite $y=x$.

3.4.18 Déterminer les points d'intersection des graphes de f et de g.

a) $f(x)=x^2-5\,x+4$ et $g(x)=-4\,x+10$

b) $f(x)=x^2+x$ et $g(x)=2\,x^2-6$

3.4.19 Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $x^2+m\,x+3=x$ a-t-elle exactement une solution ?

3.4.20 Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le graphe de la fonction $f(x)=x^2+m\,x+5$ est tangent à la droite d'équation $y=-4$.
Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.

3.4.21 Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x)=x^3+2\,x^2-x-2$

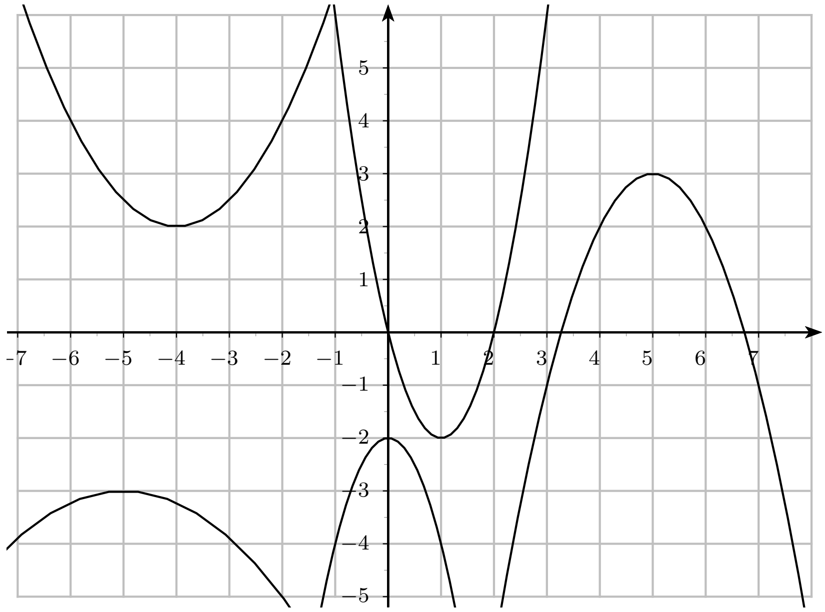
b) $f(x)=(x^3-x^2+x)\cdot(2-x)$

c) $f(x)=x^3+5\,x^2+8\,x+4$

d) $f(x)=x^3+3\,x^2+3\,x+1$

e) $f(x)=x\,(x+2)^2\cdot(2-x^2)\cdot(x^2-1)\cdot(3-2\,x)$

3.4.22 Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



3.4.23 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2\,x + 5 \geq 1$

b) $5 - 2\,x \geq 1$

c) $-4\,a - 5 < a + 5$

d) $-\,(7 - 2\,x) - 8 > 0$

e) $1 - 3\,x \leq \frac{1}{3}\,x + 2$

f) $3\,(1 - x) > \frac{2}{5}\,x$

3.4.24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée dans chacun des exercices ci-dessous.

a) $-3x^2 - 42x - 147 \geq 0$

b) $-4x^2 + 24x - 42 < 0$

c) $-4x^2 + 8x + 3 < 0$

d) $x^2 + 10x + 25 > 0$

e) $4x^2 > 0$

f) $-x^2 - 6x - 9 \geq 0$

g) $-x^2 + 14x - 48 > 0$

h) $-5x^2 + 30x - 40 > 0$

i) $-5x^2 - 20x - 20 > 0$

j) $-3x^2 + 42x - 143 \geq 0$

3.4.25 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^3 - 4\,x^2 + x + 6 > 0$

b) $x^5 - 5\,x^3 + 4\,x \leq 0$

c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$

d) $(x-2)\cdot(x^2+6\,x-1) > (x^2-4)\cdot(x^2+1)$

3.4.26 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$

b) $\dfrac{x\,(2\,x-3)^2}{x^2-4} < 0$

c) $\dfrac{4\,x^2+4\,x+1}{x^2-1} > 3$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1-x$

e) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2} > 0$

f) $\dfrac{3\,x^2-7\,x-20}{x^2+4\,x-12} \leq 0$

g) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$

h) $\dfrac{13}{2\,x+1} \geq 9-\dfrac{38}{4-x}$

i) $\dfrac{x-3}{-x^2+x-2} > 0$

j) $\dfrac{1}{x} \geq x$

k) $\dfrac{13}{2-x} \leq 7-\dfrac{4}{3\,x+1}$

l) $\dfrac{12\,x^2-13\,x-14}{x-2} < 0$

m) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x+3}$

n) $\dfrac{x}{3\,x-4} \geq \dfrac{1}{4}$

o) $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$

p) $\dfrac{6}{4-x}-\dfrac{1}{1-x} \leq 1$

q) $1 \leq \dfrac{3}{2\,x-1} \leq 5$

r) $-2\,x \leq \dfrac{2\,x-1}{x} < 1$

3.4.27 Étudier le signe de chacune des fonctions trinômes du second degré f définies ci-dessous.

a) $f : x \longmapsto 3x^2+18x+36$

b) $f : x \longmapsto -5x^2+60x-180$

c) $f : x \longmapsto -8x^2+48x-82$

d) $f : x \longmapsto -4x^2-80x-391$

e) $f : x \longmapsto -4x^2-16x-25$

3.4.28 Établir le tableau des signes des polynômes suivants, puis esquisser les graphes des fonctions correspondantes

a) $f(x)=x^4-x^3-11\,x^2+9\,x+18$

b) $f(x)=x^5-5\,x^4+10\,x^3-10\,x^2+5\,x-1$

3.4.29 Déterminer l'expression $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ de la fonction du 2e degré dont le graphe passe par les point A, B et C.

a) $A(-2; 29)$, $B(3; 19)$ et $C(1; 5)$

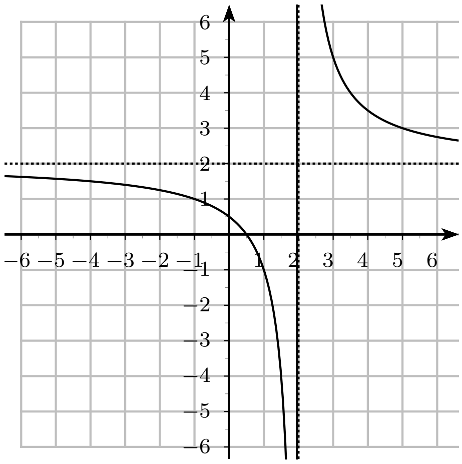
b) $A(2; -17)$, $B(-3; -72)$ et $C(-2; -37)$

3.4.30 Donner l'ensemble de définition ainsi que les points d'intersection avec les axes, faire le tableau des signes, trouver les asymptotes et esquisser le graphe des fonctions homographiques suivantes.

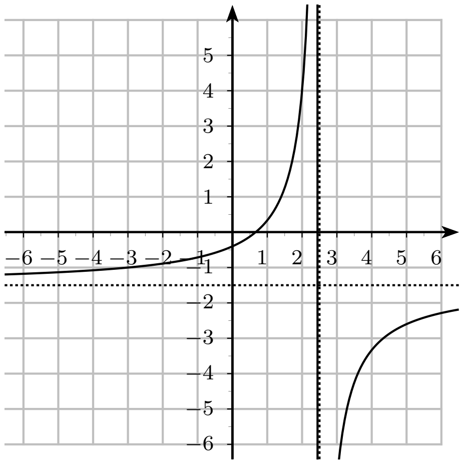
a) $f(x) = \dfrac{2\,x - 3}{3\,x + 2}$ b) $f(x) = \dfrac{-2\,x + 1}{x + 3}$ c) $f(x) = \dfrac{3 - 5\,x}{\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\,x}$

3.4.31 Donner l'expression d'une fonction homographique dont le graphe est donné ci-dessous :

a)



b)



On rappelle que la forme standard d'une fonction homographique est la suivante :

$$f(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

3.5 Solutions des exercices

Quelques démonstrations

3.1.1 –

3.1.2 –

3.1.3 Supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls premiers entre eux.
On a alors $p^2 = 2\,q^2$ qui entraîne que p est pair, soit $p = 2p'$ et $q^2 = 2p'^2$ entraîne q pair, ce qui contredit p et q premiers entre eux.

3.1.4 –

3.1.5 On sait déjà que $\mathcal{P}$ est non vide (il contient 2). Supposons que $\mathcal{P}$ soit fini avec :

$$\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_n\}$$

L'entier $z = p_1 \cdots p_n + 1$ est supérieur ou égal à 2, il admet donc un diviseur premier $p_k \in \mathcal{P}$.
L'entier p_k divise alors $z = p_1 \cdots p_n + 1$ et $p_1 \cdots p_n$, il divise donc la différence qui est égale à 1, ce qui est impossible.
En conclusion $\mathcal{P}$ est infini.

3.1.6 –

3.1.7 –

3.1.8 –

3.1.9 –

3.1.10 Non ! Si $x = -3$, $x^2 = 9$.

3.1.11 –

3.1.12

a) $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$, ou encore plus simplement, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$.

b) $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq c$, ou encore plus simplement, $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(0)$.

Ensembles et intervalles

3.2.1

a) $B = \{0; 3; 6; 9\}$

b) $C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$

c) $B \cap C = \{3; 6\}$, $\quad B - C = \{0; 9\}$, $\quad \complement_A(B) \cap \complement_A(C) = \{5; 7\}$

3.2.2

a) $A = \{-1; 0\}$

b) $B = \mathbb{Z}$

c) $C = \{-3; 1\}$

d) $D = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1\}$

e) $E = \{-1; 0; 1\}$

3.2.3 $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{5; 7\}$, $C = \{4\}$, $D = \{6; 8; 9; 10\}$.

3.2.4 $E = \{1; 3; 4; 6\}$

3.2.5 $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 5\}$

3.2.6 $A = \{1; 3; 4\}$, $B = \{1; 3\}$, $C = \{2; 3; 4\}$

3.2.7

a) $A = [-3 \ ; \ 5]$

b) $B = [4 \ ; \ 5[$

c) $C =]-\infty \ ; \ 1[$

d) $D = [10 \ ; \ +\infty[$

e) $E = [-2 \ ; \ 2]$

f) $F =]-\infty \ ; \ +\infty[$

g) $G = [2 \ ; \ 2]$

3.2.8

a) $A = \{0 \ ; 1 \ ; 2\}$ et $B = \{3 \ ; 4\}$ par exemple

b) $A = \{0 \ ; 2 \ ; 3 \ ; 4\}$ et $B = \{1 \ ; 2 \ ; 3 \ ; 4\}$ par exemple

3.2.9

a) $[-2; 0[$ $[-3; 3]$ $]3; 4[$ $[-3; -2[\cup [0; 4[$

b) $[-2; 2]$ $]-3; 1[$ $]-4; -3]$ $]-4; -2[\cup [1, 2]$

c) $]-1; 3[$ $[-3; 3[$ $]-5; -3[$ $]-5; -1]$

Généralités sur les fonctions

3.3.1

a) $f(D) = \{-11; -8; -5; -2; 1\}$

b) $f(D) = \{-3; -2; 1\}$

c) $f(D) = \{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}\}$

d) $f(D) = \{-\frac{1}{5}; 0; 1; \frac{3}{5}\}$

3.3.2

a) oui

b) non

c) non

d) oui

e) non

f) non

g) oui

h) non

i) non

j) non

3.3.3 –

3.3.4 –

3.3.5 –

Etude d'une fonction

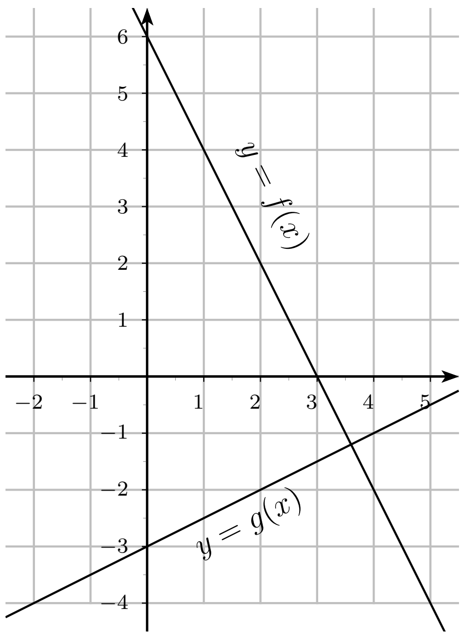
3.4.1

a) $D = \mathbb{R} - \{3\}$
b) $D = \mathbb{R} - \{3\}$
c) $D = \mathbb{R} - \{-5\}$
d) $D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$
e) $D = \mathbb{R}$
f) $D = \mathbb{R} - \{-1; 0\}$
g) $D = \mathbb{R} - \{-4; 3\}$
h) $D = \mathbb{R} - \{-2\}$
i) $D = [1; +\infty[$
j) $D =]-5; +\infty[$
k) $D =]-\infty; 2]$
l) $D = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

3.4.2

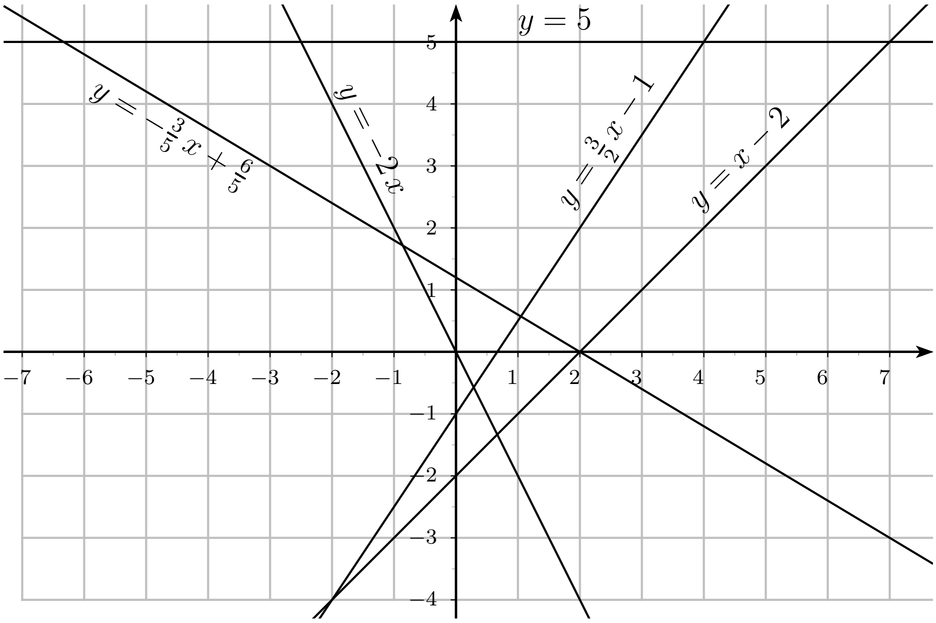
a) $f(0) = -1.5$
b) $f(-2) = -3.2$
c) $f(x) = 0 \iff x \in \{-3; 4, 2\}$
d) $f(x) = 2 \iff x \in \{-3.3; 4.8\}$
e) si $a = -3.5$
f) $f(x) = x \iff x \in \{-2.4; 5.3\}$
g) $f(x) = -x \iff x \in \{-3.5; 0.7\}$

3.4.3



a) $x = 3$
b) $x = \frac{18}{5}$
c) $x = 2$
d) $x > 3$
e) $x < \frac{18}{5}$
f) $x \leq 2$

3.4.4



3.4.5

a) $I\left(\frac{17}{11}; \frac{14}{11}\right)$

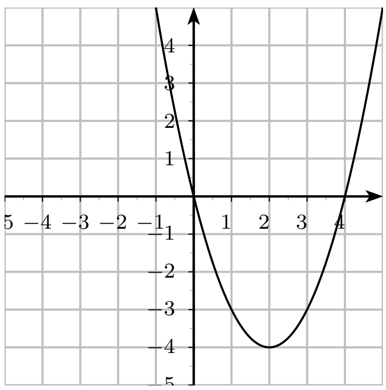
b) $f(x) = \frac{14}{17}\,x$

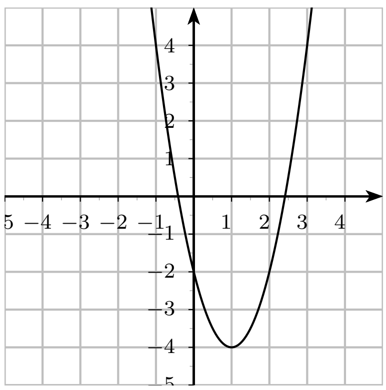
c) $g(x) = \frac{14}{17}\,x - \frac{45}{17}$

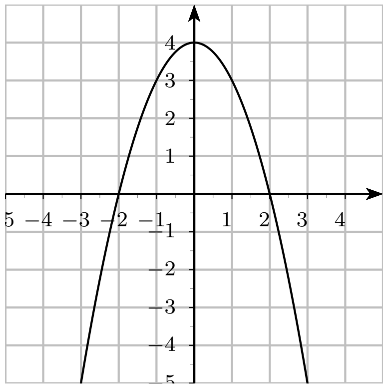
3.4.6

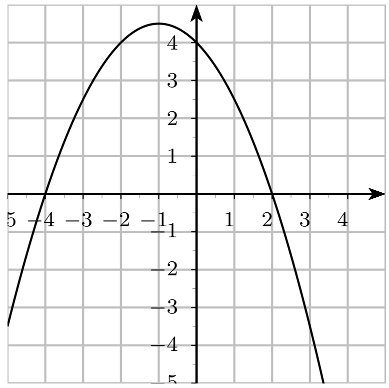
Elles forment un triangle.

3.4.7

a) 

b) 

c) 

d) 

3.4.8 –

3.4.9
La fusée est donc 180 m au-dessus du sol au temps suivant : $t = \frac{15-3\sqrt{5}}{4} \cong 2.07s$ et $t = \frac{15+3\sqrt{5}}{4} \cong 5.43s$

3.4.10 $d(t) = 5\sqrt{61\,t^2 + 144\,t + 144}$

3.4.11
a) Après 1 s et après 3 s ; b) Après 4 s

3.4.12
a) 206.25 m ; 40 km/h

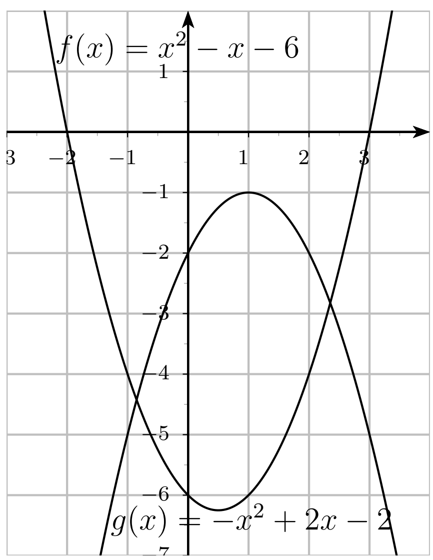
3.4.13

a) $t = 0.51$ s et $t = 23.98$ s

b) hauteur maximale : 734.69 m et le temps requis : 12.24 s

3.4.14
$I_1(3;9)$ et $I_2(5;33)$

3.4.15



a) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$

b) Pas de solution

c) $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

d) $S = \,]-\infty\ ;\ -2\,[\ \cup\ ]\ 3\ ;\ +\infty\,[$

e) $S = \,]-2\ ;\ 3\,[$

f) $S = \{\,\}$

g) $S = \mathbb{R}$

h) $S = \left]\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right[$

i) $S = \,]-\infty\ ;\ 0\,]\ \cup\ [\ 2\ ;\ +\infty\,[$

3.4.16

a) $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 5$

b) $y = -2(x+3)\cdot(x-1)$

c) $y = \frac{1}{4}(x+3)\cdot(x-1)$

3.4.17

$y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 2$

3.4.18

a) $I(-2; 18)$ et $J(3; -2)$

b) $I(-2; 2)$ et $J(3; 12)$

3.4.19

$m_1 = 1 + \sqrt{12}$, $m_2 = 1 - \sqrt{12}$

3.4.20 $a_1 = 6$, point de contact $(-3; -4)$, $a_2 = -6$, point de contact $(3; -4)$

3.4.21

a)

x		-2		-1		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b)

x		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c)

x		-2		-1	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

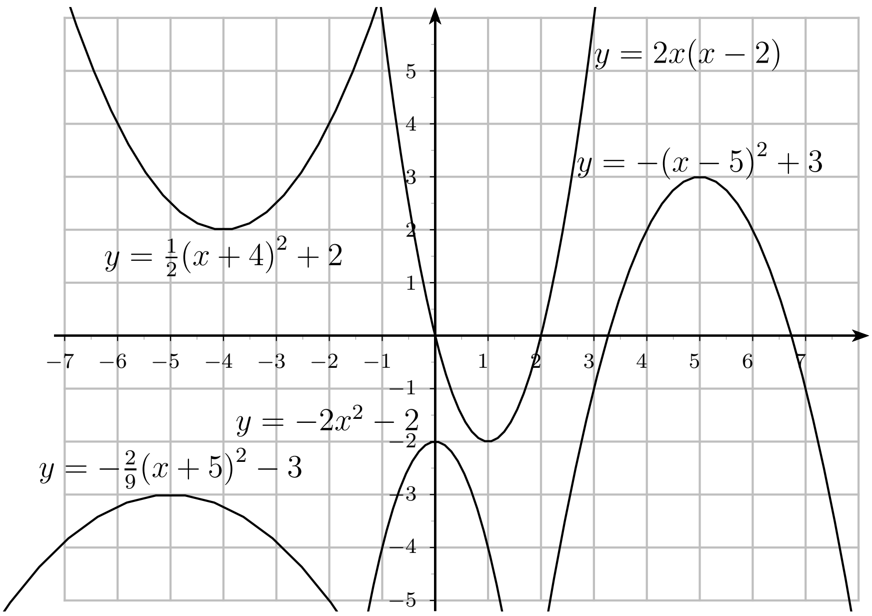
d)

x		-1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

e)

x		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

3.4.22



3.4.23

a) $x \geq -2$

b) $x \leq 2$

c) $a > -2$

d) $x > \frac{15}{2}$

e) $x \geq -\frac{3}{10}$

f) $x < \frac{15}{17}$

3.4.24

a) $S = \{-7\}$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{7}\right)\right[\cup \left]\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{7}\right); +\infty\right[$

d) $S =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$

e) $S =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

f) $S = \{-3\}$

g) $S =]6; 8[$

h) $S =]2; 4[$

i) $S = \varnothing$

j) $S = \left[\frac{1}{3}\left(21-2\sqrt{3}\right); \frac{1}{3}\left(21+2\sqrt{3}\right)\right]$

3.4.25

a) $x \in \,]-1\,;\,2\,[\,\cup\,]\,3\,;\,+\infty\,[$

b) $x \in \,]-\infty\,;\,-2\,]\,\cup\,[\,-1\,;\,0\,]\,\cup\,[\,1\,;\,2\,]$

c) $x \in \,]-\infty\,;\,-1\,]\,\cup\,\{\,1\,\}$

d) $x \in \,]-3\,;\,1\,[\,\cup\,]\,1\,;\,2[$

3.4.26

a) $S =]-\infty; -2[\cup]0; 1[\cup]2; +\infty[$

b) $S =]-\infty; -2[\cup]0; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; 2[$

c) $S =]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]1; +\infty[$

d) $S = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$

e) $S =]1; 2[\cup]3; +\infty[$

f) $S =]-6; -\frac{5}{3}] \cup]2; 4]$

g) $S =]-\infty; -1[\cup [0; 1[$

h) $S =]-\frac{1}{2}; 4[$

i) $S =]-\infty; 3[$

j) $S =]-\infty; -1] \cup]0; 1]$

k) $S =]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[$

l) $S =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{7}{4}; 2[$

m) $S =]-\infty; -3-\sqrt{2}[\cup]-3; -2[\cup]-3+\sqrt{2}; -1[$

n) $S =]-\infty; -4] \cup]\frac{4}{3}; +\infty[$

o) $S =]-3; -1[\cup]2; +\infty[$

p) $S =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$

q) $S = [\frac{4}{5}; 2[$

r) $S = [\frac{\sqrt{3}-1}{2}; 1[$

3.4.27

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

b) Le signe de f est donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

d) Le signe de f est donné par le tableau suivant.

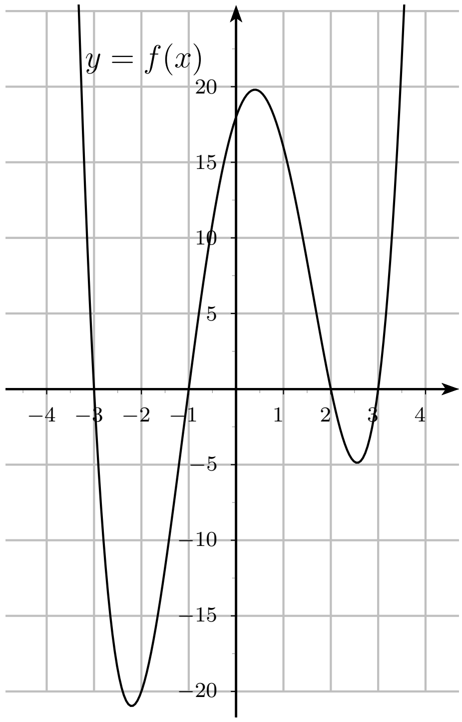
x	$-\infty$		$-\frac{23}{2}$		$-\frac{17}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

3.4.28

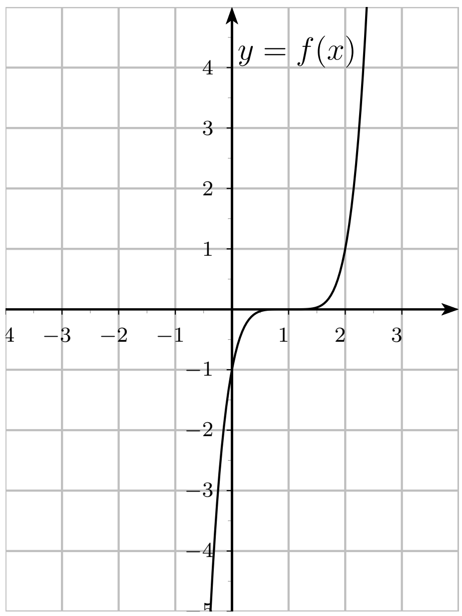
a)

x		-3		-1		2		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



b)

x		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$



3.4.29

a) $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 7$

b) $f(x) = -6\,x^2 + 5\,x - 3$

3.4.30

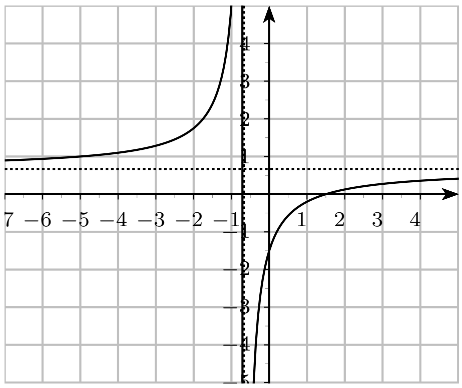
a) $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Points sur les axes : $(\frac{3}{2}; 0)$ et $(0; -\frac{3}{2})$

Tableau des signes :

x		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -\frac{2}{3}$ $\quad y = \frac{2}{3}$



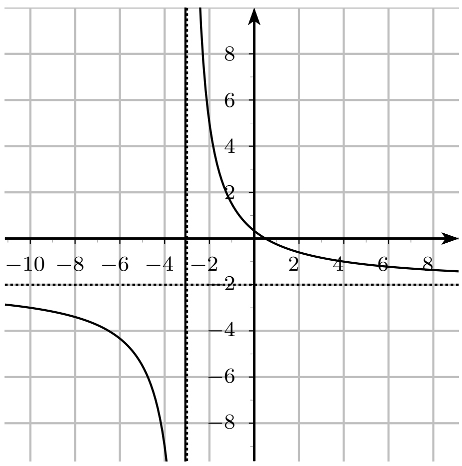
b) $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

Points sur les axes : $(\frac{1}{2}; 0)$ et $(0; \frac{1}{3})$

Tableau des signes :

x		-3		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

Asymptotes : $x = -3$ $\quad y = -2$



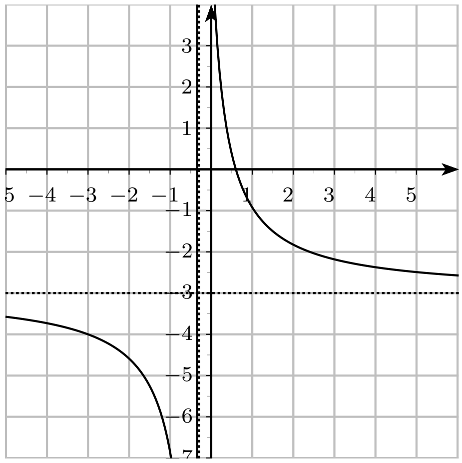
c) $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{10}\right\}$

Points sur les axes : $(\frac{3}{5}; 0)$ et $(0; 6)$

Tableau des signes :

x		$-\frac{3}{10}$		$\frac{3}{5}$	
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

Asymptotes : $x = -\frac{3}{10}$ $\quad y = -3$



3.4.31

a) $f(x) = \dfrac{2\,x-1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{-3\,x+2}{2\,x-5}$

Chapitre 4

Trigonométrie

4.1 La mesure des angles

4.1.1 Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians

a) $\pi/6$

b) $2\,\pi/3$

c) $7\pi/10$

d) $4\,\pi$

e) $-5\,\pi/6$

f) $15\,\pi/6$

g) 1

h) 0.7

i) -2

j) 3

4.1.2 Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés

a) $45°$

b) $60°$

c) $75°$

d) $-30°$

e) $120°$

f) $315°$

g) $22.7°$

h) $-107.9°$

i) $292.3°$

j) $152.5°$

4.1.3 Calculer, à 1 mm près, le rayon d'un cercle sur lequel

a) un arc de $1°$ mesure 3 mm.

b) un arc de $0.03°$ mesure 0.05 mm.

4.1.4 Calculer, à 1 mm près, la longueur d'un arc

a) de $32°$ sur un cercle de rayon 15 cm.

b) de 2 rad sur un cercle de rayon 7cm.

4.1.5

a) Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $\frac{1}{60}$ degré (ou 1 minute d'arc). Quelle est leur distance (cette distance définit le mille nautique) sachant que le rayon de la terre est de 6370 km ?

b) Peut-on poser la même question pour deux points situés sur un même parallèle dont les longitudes diffèrent ?

4.1.6 Bulle et Porrentruy se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $46°37'$N et $47°25'$N. Calculer la distance «à vol d'oiseau » entre ces deux villes.

4.1.7 Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance «à vol d'oiseau » est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est de $46°14'$N, calculer la latitude de Delémont.

4.1.8 Dunkerque et Barcelone se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $49°45'$N et $40°15'$N. Calculer la distance «à vol d'oiseau » entre ces deux villes.
La mesure de la distance entre Dunkerque et Barcelone s'est faite par triangulation entre 1792 et 1798. Elle a servi de base à la première définition du mètre comme la dix millionième partie du quart de méridien terrestre.

4.1.9 Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km. Lorsque le Soleil est à la verticale de A, les rayons du Soleil forment avec la verticale, en B, un angle de $7.2°$
En déduire la circonférence et le rayon terrestre.
Cette méthode a été imaginée par Eratosthène (284-195 av. J.-C.) après avoir appris que, un certain jour de l'année à midi, le Soleil se réfléchit verticalement dans un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) qui correspondait au point A. Le point B était Alexandrie, située à 800 km au nord de Syène. Pour déterminer l'angle à midi, on mesurait l'ombre d'un pilier vertical.

4.1.10 Le diamètre d'un cercle mesure 48 cm. Trouver la longueur de l'arc et la surface du secteur circulaire défini par un angle au centre de $20°$.

4.1.11 Deux points A et B situés sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $2°$. Quelle est la distance entre ces deux points ? Rayon de la terre : $6'350$ km.

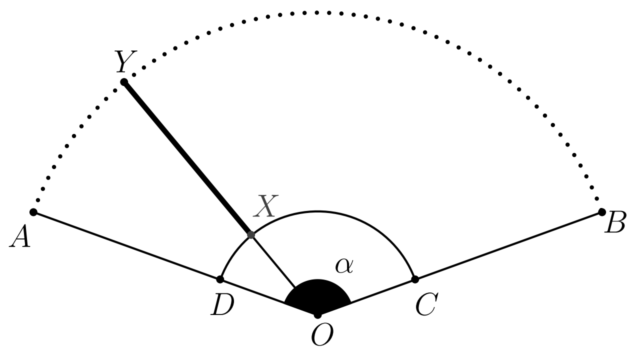
4.1.12 La terre effectue une rotation complète après 23 h 56 min 4 s. Calculer de combien de degrés la terre tourne en une seconde. On donne le rayon de la terre : $6'350$ km.

4.1.13 Une roue tourne à la vitesse de 48 tours/minute. Exprimer cette vitesse angulaire en :

a) tours/seconde b) degrés/seconde

4.1.14 Un pneu de voiture mesure 75 cm de diamètre. A quelle vitesse angulaire en tours/minute la roue tourne-t-elle sur son axe si la voiture roule à 72 km/h ?

4.1.15 Un essuie-glace mesure 40 cm de long de son point de rotation O à son extrémité Y et balaie sur une longueur de 30 cm, entre les points X et Y.



On suppose que l'angle d'oscillation α mesure $140°$.

a) Calculer la longueur en cm de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru par l'extrémité Y du balai d'essuie-glace durant une oscillation de gauche à droite.

b) Calculer l'aire en cm² de la surface $ABCD$ balayée par l'essuie-glace XY .

4.2 Le triangle rectangle

4.2.1 Un triangle rectangle ABC est rectangle en A. Résoudre ce triangle connaissant :

a) $\gamma = 32°$ et $BC = 10$ b) $\beta = 32°$ et $BC = 5$ c) $\gamma = 27°$ et $AB = 10$

d) $AC = 6$ et $AB = 10$ e) $\gamma = 64°$ et $AC = 12$ f) $\beta = 45°$ et $BC = 12$

4.2.2 Dans un triangle ABC rectangle en B, on donne $\gamma = 27°$ et $AB = 40$ cm. Calculer les longueurs BC, CH et HA où H est le pied de la hauteur sur AC issue de B.

4.2.3 Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 m lorsque le soleil est élevé de $37.5°$ au-dessus de l'horizon ?

4.2.4 Une route en ligne droite fait un angle de 2.3° avec sa projection horizontale. Quel chemin faut-il parcourir pour s'élever de 109.20 m au-dessus du niveau du point de départ ?

4.2.5 La voûte d'un tunnel est un arc de cercle d'angle au centre 220°. Calculer le rayon r de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 12 m, ainsi que la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

4.2.6 Déterminer le périmètre et l'aire du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 6 cm.

4.2.7 Quel est le rayon d'un cercle dans lequel une corde de 18.40 cm sous-tend un arc de 48° ?

4.2.8 De mon balcon situé à 9 m au-dessus du sol, j'observe l'immeuble d'en face. Pour voir le bas de l'immeuble, je dois baisser les yeux d'un angle de 20°, alors que pour en voir le sommet, je dois lever les yeux d'un angle de 10°. Quelle est la hauteur de l'immeuble d'en face ?

4.2.9 Natacha se trouve à 9 m d'un peuplier qu'elle aperçoit sous un angle de 58° (on néglige la hauteur des yeux par rapport au sol). Sous quel angle le verra-t-elle si elle recule de 30 m ?

4.2.10 Couché par terre à Ouchy, j'observe le jet d'eau de Genève. J'en vois une portion de 24 m de haut. Sachant que la distance d'Ouchy au pied du jet d'eau est de 50 km, mesurée à la surface du lac et que le rayon de la terre est de $6'350$ km, quelle est la hauteur du jet d'eau ?

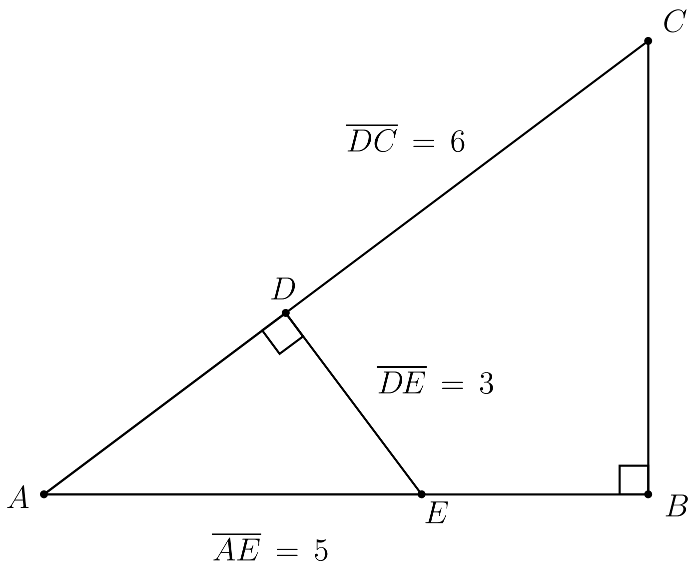
4.2.11 Considérons un cube $ABCDEFGH$ de longueur d'arête égale à 6 cm. Soit J le milieu de FG et I le milieu de BC.

a) Calculer la mesure des angles $\widehat{JAI}$, $\widehat{JAB}$ et $\widehat{JAD}$,

b) Calculer la longueur d'une des diagonales du cube.

4.2.12 Un cône de révolution dont le rayon de base vaut 6 cm est inscrit dans une sphère de rayon 10 cm. Calculer l'angle au sommet du cône, ainsi que l'angle au sommet de son développement.

4.2.13 En utilisant les informations données sur le dessin ci-dessous, calculer toutes les dimensions manquantes et tous les angles déterminés par la figure.

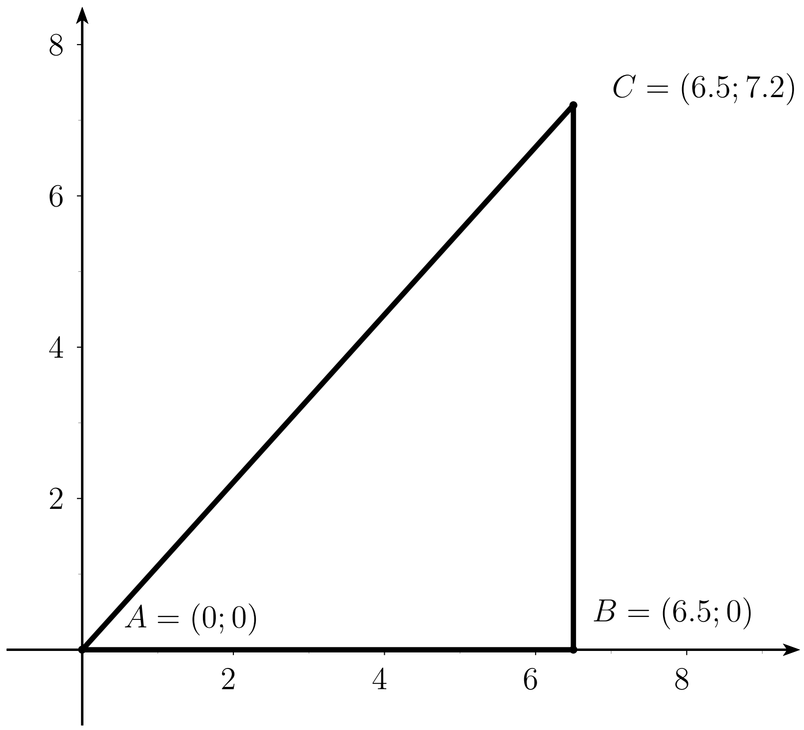


4.2.14 Une échelle de 4 m de long est appuyée contre la façade d'un bâtiment et l'angle entre l'échelle et le bâtiment est de 22°.

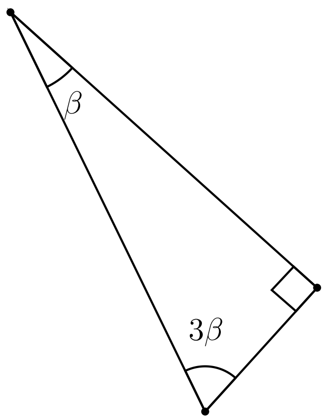
a) Calculer la distance entre le pied de l'échelle et le mur.

b) Si la distance entre le pied de l'échelle et le mur augmente de 1 m, de combien le point d'appui de l'échelle contre le mur va-t-il descendre ?

4.2.15 Le triangle ABC est-il rectangle ? Si c'est le cas, calculer la longueur $\overline{AC}$.



4.2.16 D'un triangle rectangle, on sait qu'un angle aigu est égal au triple de l'autre angle aigu.



a) Quelle est la mesure de chacun des trois angles ?

b) Si le petit côté adjacent à l'angle droit mesure 10 unités, quelle est la longueur des deux autres côtés ?

4.2.17 L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale est de 43° à 72 m de la tour, l'oeil de l'observateur étant à 1.10 m au dessus du sol. Quelle est la hauteur de cette tour ?

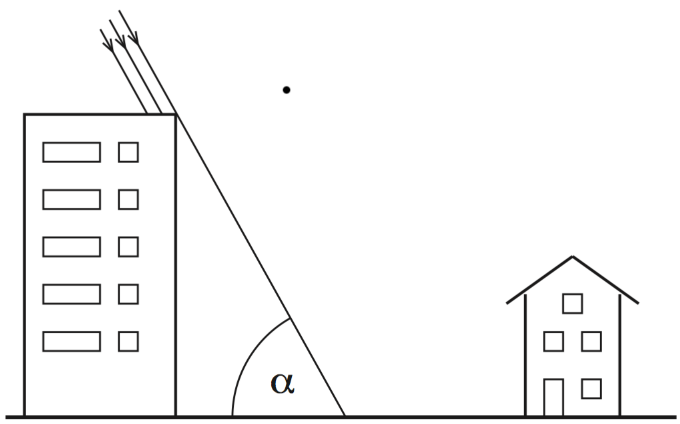
4.2.18 L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale dont le pied est inaccessible est 24° ; on s'avance de 32 m vers la tour sur une horizontale, et l'angle d'élévation du sommet est alors égal à 40°. On sait encore que l'oeil de l'observateur est élevé de 1.5 m. Quelle est la hauteur de la tour ?

4.2.19 Mesurer la distance d'un point A à un autre B inaccessible. On a pris une base AC, perpendiculaire à AB et longue de 80 m. L'angle formé au point C par les rayons visuels menés en A et en B égale 48°.

4.2.20 Deux observateurs, distants de 1750 m sur une horizontale, mesurent au même instant les hauteurs d'un point remarquable d'un nuage. Ce point est dans le plan vertical de la base d'observation, et les angles d'élévation sont 72° et 84°. Quelle est la hauteur du nuage s'il se trouve entre les deux observateurs ?

4.2.21 Une personne placée au bord d'une rivière voit sous un angle de 60° un arbre planté sur la rive opposée; lorsqu'elle s'éloigne de 40 m, cet angle n'est plus que 20°. Quelle est la hauteur de l'arbre et la largeur de la rivière ?

4.2.22 Un propriétaire apprend que l'on va construire un immeuble de 20 m de haut à 40 m de sa maison (distance entre les deux murs les plus proches de l'immeuble et de la maison) ; on note α l'angle que forment les rayons du soleil avec le sol.



a) On suppose que $\alpha = 72°$; calculer la longueur (au cm près) de l'ombre de l'immeuble et vérifier que cette ombre ne touche pas la maison.

b) On suppose que $\alpha = 22°$; montrer par calculs que l'ombre de l'immeuble touche la façade la plus proche de la maison et calculer la hauteur maximale atteinte par l'ombre sur cette façade.

4.2.23 La grande pyramide de Chéops est une pyramide régulière dont la base est un carré auquel les égyptiens donnèrent des dimensions telles que l'on pouvait en parcourir un côté en 140 tours d'une roue d'une coudée royale de diamètre (une coudée royale mesure environ 0,524 m). Quant à la hauteur, elle mesurait 280 coudées royales. Calculer :

a) La longueur du côté de la base et celle des arêtes latérales de la pyramide (au cm près).

b) L'angle que les faces de la pyramide forment avec le sol.

4.2.24 Un bras de robot peut tourner autour de l'origine d'un repère Oxy (unité : le cm) et peut également varier en longueur.

a) La main du bras du robot se trouve au départ au point P de coordonnées $P(-50\,;\,0)$. Le bras du robot tourne alors d'un angle $\alpha = -205°$ et s'allonge de 10 cm. Quelles seront les coordonnées (au mm près) du point Q où se trouve la main du robot après ces deux opérations ?

b) La main du bras du robot se trouve au départ au point R de coordonnées $R(-20\,;\,48)$ et à la fin au point S de coordonnées $S(40\,;\,-30)$. De quel angle (à 0.1° près et avec son signe) le bras du robot a-t-il tourné et de combien la longueur du bras a-t-elle varié ?

4.3 Le cercle trigonométrique

4.3.1 Déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques des angles de 45°, 30° et 60°.

4.3.2 Donner les expressions suivantes en fonction de t uniquement :

a) $\cos(270° + t)$

b) $\sin(-t - 270°)$

c) $\sin(t - 270°)$

d) $\cos(t - 270°)$

e) $\cos(-\dfrac{19\,\pi}{2} - t)$

f) $\sin(t + \frac{\pi}{2})\,\cos(\pi - t) - \cos(\frac{\pi}{2} - t)\,\sin(t)$

4.3.3 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

b) $\sin(t) = 0.829$

c) $\tan(t) = -0.754$

d) $\cos(t) = -1.43$

e) $\tan(t) = 5.33$

f) $\sin(3\,t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\tan(5\,t) = 3.273$

h) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

4.3.4 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin\left(\frac{2t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

c) $\sin(3\,t)=\sin(2\,t)$

d) $\cos(2\,t)=\cos(4\,t)$

e) $\sin(2\,t)=\cos\left(3\,t+\frac{\pi}{4}\right)$

f) $\sin\left(\frac{4\,t}{3}\right)+\cos\left(\frac{t}{2}\right)=0$

g) $\tan(3\,t)=\cot(t)$

h) $\cos(2\,t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\,t\right)$

4.3.5 Résoudre les équations suivantes.

a) $4\cos^2(t)-4\cos(t)-3=0$

b) $2\sin^2(x)-3\sin(x)+1=0$

c) $3\sin^2(z)+8\cos(z)+1=0$

d) $3\sin^2(t)+\cos^2(t)-2=0$

e) $5\sin(x)=6\cos^2(x)$

f) $\cos(x)=\tan(x)$

g) $8\cos^2(t)+5\sin(t)-1=0$

h) $\tan^4(t)-4\tan^2(t)+3=0$

4.3.6 Résoudre les équations suivantes.

a) $3\cos(x)+2\sin(x)=-3$

b) $\sin(t)+3\cos(t)=3$

c) $\sin(x)-\cos(x)=\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}\cos(t)-\sin(t)=1$

e) $3\sin(t)+5\cos(t)=2$

f) $\sin(2\,x)+3\cos(2\,x)=2$

4.3.7 Résoudre les équations suivantes en utilisant la relation $\tan(x)=\sin(x)/\cos(x)$ pour obtenir une équation en $\tan(x)$.

a) $\sin(t)=3\cos(t)$

b) $\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-2\sin^2(\alpha)=0$

c) $\sin^2(t)-4\sin(t)\cdot\cos(t)+3\cos^2(t)=0$

d) $1-2\sin(x)\cdot\cos(x)-2\cos^2(x)=0$

e) $\cos^2(\varphi)+4\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)-5\sin^2(\varphi)=0$

f) $5\sin^2(2\,t)+3\sin(t)\cdot\cos(t)-4=0$

4.3.8 Résoudre les équations suivantes en utilisant la relation $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ pour obtenir une équation en $\tan(x)$.

a) $\sin(2\,t) = \tan(t)$

b) $\cos(2\,x) + 2\,\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$

c) $\sin(x) \cdot \cos(2\,x + \pi/3) = \sin^2(x)$

d) $1 + \sin(x) = \cos(2\,x)$

4.4 Le triangle quelconque

4.4.1 On aimerait construire un triangle ABC dont

- le côté a mesure 7 cm ;
- l'angle β vaut 52°.

Quelle mesure faut-il donner au côté b pour

a) qu'il soit possible de construire deux triangles différents ?

b) qu'il n'y ait qu'un seul triangle constructible ?

c) que la construction ne soit pas possible ?

Illustrer les trois cas ci-dessus à l'aide d'un dessin à la règle et au compas. Rédiger la marche à suivre de la construction du point b).

4.4.2 Est-il possible de construire un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse mesure 7.5 cm et dont l'un des côtés adjacent à l'angle droit mesure 3.9 cm ?

4.4.3 Construire les triangles ABC dont on connaît :

a) $a = 6$ cm $\quad b = 5$ cm $\quad \beta = 45°$

b) $c = 8$ cm $\quad \beta = 30° \quad \gamma = 120°$

4.4.4 Chaque ligne du tableau ci-dessous donne des informations sur un triangle ABC quelconque On sait que l'on a mesuré les longueurs en centimètres et les angles en degrés.

	a	b	c	α	β	γ	$\mathcal{A}$
a)	5	6	7				
b)	5	7		35			
c)	4	9				54	
d)			8	40	80		
e)	6	5					12
f)		4		70			10

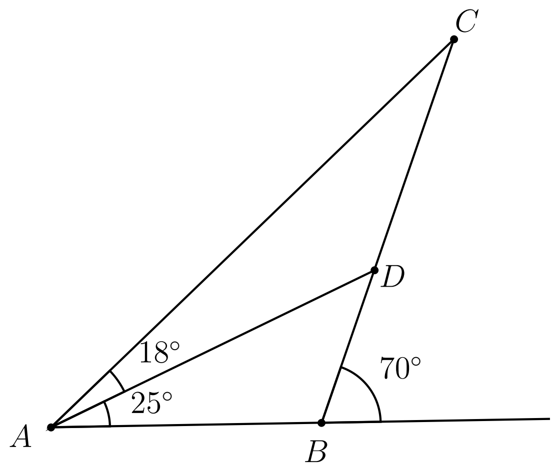
a) En utilisant uniquement les informations données dans le tableau ci-dessus avant qu'il ne soit complété, construire les triangles des points a), c) et d) à l'aide de la règle et du compas, en utilisant un rapporteur pour tracer les angles si nécessaire. Rédiger la marche à suivre de chaque construction.

b) Compléter le tableau par calcul.

4.4.5 Après avoir construit chaque triangle donné par les éléments ci-dessous, le résoudre :

a) $a = 8$, $b = 11$ et $\beta = 14°$ b) $b = 11$, $c = 9$ et $\gamma = 22°$ c) $a = 11$, $c = 12$ et $\alpha = 154°$

4.4.6 Calculer la longueur des segments BC, BD, AD et AB, sachant que la longueur du segment AC vaut 88 cm.



4.4.7 Un triangle ABC est donné par $a = 26.4$, $b = 16.2$ et $c = 20.7$. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4.4.8 D'un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne l'angle en A : 110°, ainsi que les longueurs des quatres côtés : $AB = 3$, $BC = 6$, $CD = 6$ et $DA = 5$. Calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

4.4.9 Sur la diagonale AC d'un rectangle $ABCD$, on considère un point O tel que $\widehat{BOC} = 57°$. Sachant que $AB = 36$ et $AO = 24$, calculer BC.

4.4.10 Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points

A et B distants de d mètres. On mesure les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A. Quelle est l'altitude de C si celle de A vaut h ?

Application numérique : $d = 400$ m, $h = 1'000$ m, $\widehat{BAC} = 35°$, $\widehat{ABC} = 110°$ et $\theta = 20°$.

4.4.11 Montrer que l'aire d'un triangle ABC est égale à :

a) $\mathcal{A} = \dfrac{abc}{4r}$,

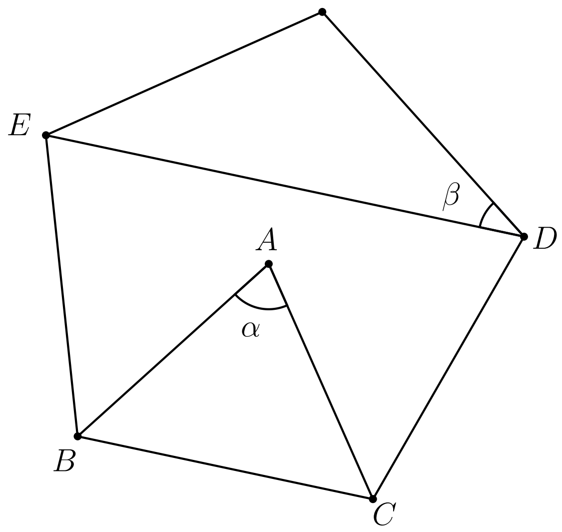
b) $\mathcal{A} = 2r^2 \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$,

où r désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4.4.12 On a tracé ci-dessous un pentagone régulier dont le côté mesure 4 cm. Le point A est le centre du pentagone.

a) Calculer la valeur des angles α et β.

b) Calculer la longueur des segments AB et DE.



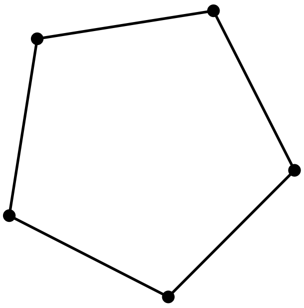
4.4.13 Dans le parallélogramme $ABCD$, on connaît $\overline{AB} = 30$, $\overline{BC} = 20$ et on sait que l'angle en B vaut $60°$. Calculer la longueur des diagonales de ce parallélogramme ainsi que l'angle déterminé par celles-ci. Trouver enfin l'aire du quadrilatère $ABCD$.

4.4.14 Calculer les trois côtés d'un triangle, sachant qu'ils sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs et que le plus grand angle est le double du plus petit.

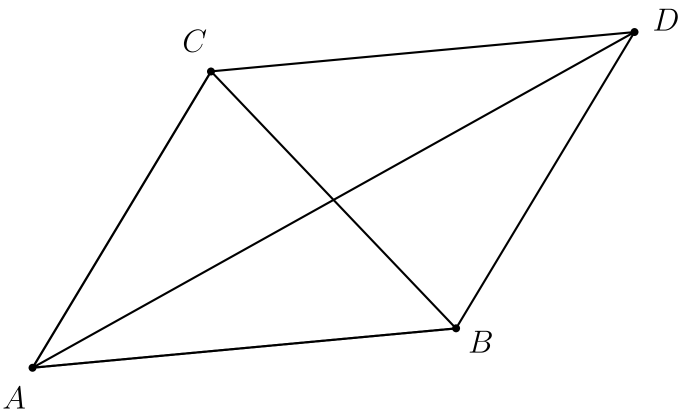
4.4.15 Dans le trapèze $ABCD$, les bases sont $\overline{AD} = 15$ m, $\overline{BC} = 10$ m et les côtés non parallèles sont $\overline{AB} = 8$ m, $\overline{CD} = 7$ m. Calculer les angles et l'aire du trapèze.

4.4.16 Le Pentagone est le plus grand bâtiment administratif au monde, si l'on considère la surface occupée. La base du bâtiment a la forme d'un pentagone régulier, dont chaque côté mesure 276 m.

Déterminer l'aire de la base du bâtiment.



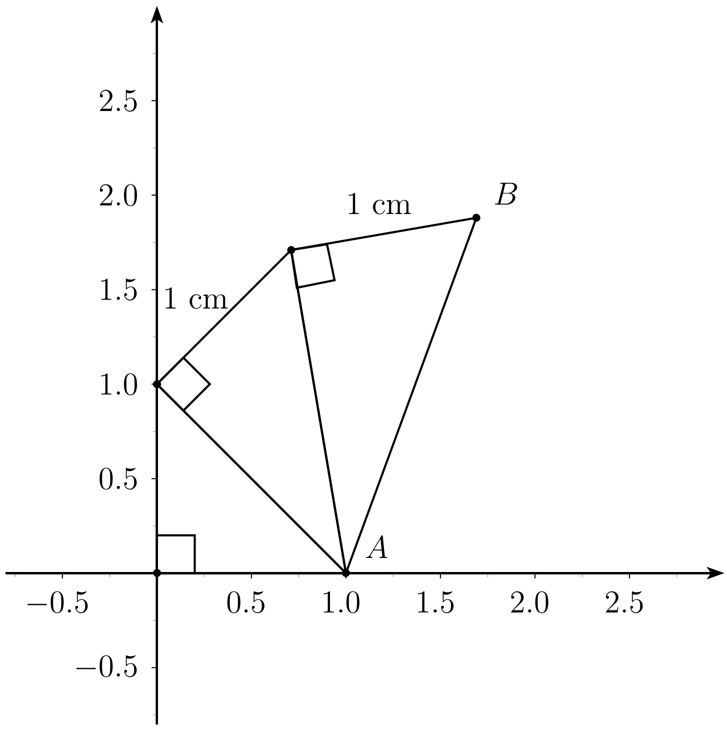
4.4.17 Comment partager un parallélogramme en quatre parties de même aire ?
Facile, il suffit de tracer les diagonales de ce parallélogramme, et on a ainsi quatre parties de même aire...



Est-ce vrai ?

4.4.18 Calculer les longueurs des bissectrices d'un triangle ABC si $a = 62.5$, $b = 48.2$ et $c = 37.8$.
On considère la bissectrice issue du sommet A comme étant le segment défini par le sommet A et l'intersection de cette bissectrice avec le côté a.

4.4.19 En utilisant les informations données sur le dessin, calculer la longueur $\overline{AB}$.



4.4.20 Calculer le côté et les angles inconnus d'un triangle ABC, connaissant $a = 5$, $c = 7$ et sachant que la longueur de la bissectrice issue de B est égale 4.5.

4.4.21 Pour calculer la distance séparant deux points A et B situés sur les rives opposées d'un fleuve, un géomètre choisit un point C situé sur la même rive à 240 m du point A. Il détermine alors que les angles $\angle BAC$ et $\angle ACB$ mesurent respectivement $63°24'$ et $54°6'$. Calculer la distance entre les points A et B (au cm près).

4.4.22 Pour un observateur, la direction de visée du sommet d'un pylône fait un angle de $53.6°$ avec l'horizontale ; en reculant de 7 m sur le sol horizontal dans le plan de visée, l'angle d'élévation n'est plus que $32°$.
Quelle est la hauteur du pylône sachant que l'œil de l'observateur est à 1,7 m du sol ?

4.4.23 Une tour de 50 m de haut est située sur le flanc d'une colline. Depuis le pied de la tour, on descend de 220 m le long du flanc de la colline et on mesure l'angle vertical θ sous lequel on voit la tour, soit $\theta = 12.5°$.
Calculer l'angle d'inclinaison du flanc de la colline relativement à l'horizontale.

4.4.24 Un hélicoptère est en vol stationnaire 600 m au-dessus du sommet C d'une montagne qui culmine à 1'560 m d'altitude. Du sommet C et de l'hélicoptère, on peut voir le sommet S d'un deuxième pic plus élevé. Depuis l'hélicoptère, le sommet S est vu sous

un angle de dépression (angle vertical entre le rayon visuel descendant et l'horizontale) de 43° ; depuis le petit sommet C, on voit le sommet S sous un angle d'élévation (angle vertical entre le rayon visuel montant et l'horizontale) de 18°.
Calculer la distance entre les deux sommets, ainsi que l'altitude du sommet S.

4.4.25 A l'origine la Tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de hauteur. Comme elle s'enfonce dans le sol (en pivotant relativement au centre de sa base que l'on suppose fixe), elle penche maintenant d'un angle θ relativement à la verticale. Lorsque le centre du haut de la tour est observé à partir d'un point du sol (plat) distant de 45 m du centre de sa base (dans le plan vertical contenant la tour penchée, du côté où penche celle-ci), l'angle d'élévation est de 53.3°.
Calculer l'angle θ, ainsi que la distance séparant la position actuelle du centre du haut de la tour à sa position lors de l'édification de la tour.

4.5 Solutions des exercices

La mesure des angles

4.1.1

a) $30°$
b) $120°$
c) $126°$
d) $720°$
e) $-150°$
f) $450°$
g) $57.3°$
h) $40.1°$
i) $-114.6°$
j) $171.9°$

4.1.2

a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{12}$
d) $-\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{2\pi}{3}$
f) $\frac{7\pi}{4}$
g) 0.40
h) -1.88
i) 5.10
j) 2.66

4.1.3

a) 172 mm
b) 95 mm

4.1.4

a) 84 mm
b) 140 mm

4.1.5

a) 1853 m
b) Non

4.1.6

90 km

4.1.7

$47°20'$N

4.1.8

1056 km

4.1.9

Circonférence : 40000km ; rayon : 6366 km

4.1.10

$L \simeq 8.38$ cm et $A \simeq 100.53$ cm^2.

4.1.11
La distance entre les points A et B est d'environ 221.66 km.

4.1.12 En une seconde, la Terre tourne de 0.00417 degrés.

4.1.13
a) $\frac{4}{5}$ tours/minute ; b) 288°/seconde.

4.1.14 509.30 tours/minutes.

4.1.15

a) 97,7 cm

b) 1832,60 cm^2

Le triangle rectangle

4.2.1
a) $\beta = 58°$, $AC \simeq 8.48$, $AB \simeq 5.30$; b) $\gamma = 58°$, $AC \simeq 2.65$, $AB \simeq 4.24$; c) $\beta = 63°$, $BC \simeq 22.03$, $AC \simeq 19.63$; d) $\beta \simeq 30.96°$, $\gamma \simeq 59.04$, $BC \simeq 11.66$; e) $\beta = 26°$, $BC \simeq 27.37$, $AB \simeq 24.60$; f) $\gamma = 45°$, $AC \simeq 8.49$, $AB \simeq 8.49$.

4.2.2
$BC \simeq 78.50$ cm, $CH \simeq 69.95$ cm, $HA \simeq 18.16$ cm.

4.2.3
Le clocher mesure ~ 27.62 m.

4.2.4
Il faut parcourir $2'721.03$ m.

4.2.5
Le rayon mesure ~ 6.39 m et la hauteur de la voûte est de ~ 8.57 m.

4.2.6
Le périmètre mesure 35.27 cm et l'aire est de 85.6 cm^2.

4.2.7
Le rayon est de ~ 22.62 cm.

4.2.8
La hauteur du bâtiment est de ~ 13.36 m.

4.2.9
Elle le voit sous un angle de $\sim 20.27°$.

4.2.10
La hauteur du jet d'eau est ~ 221 m.

4.2.11
a) $\widehat{JAI} \simeq 41.81°$, $\widehat{JAB} \simeq 48.19°$, $\widehat{JAD} \simeq 70.53°$; b) ~ 10.39 cm.

4.2.12
Angle au sommet : 36.87°. Angle de développement : 113.84° .

4.2.13
$\overline{AD} = 4$, $\overline{EB} = 3$, $\overline{BC} = 6$, $\widehat{ACB} = \widehat{AED} \simeq 53.13°$, $\widehat{BED} \simeq 126.87°$, $\widehat{CAB} \simeq 36.87°$.

4.2.14
La distance entre le pied de l'échelle et le mur vaut environ 1.5 m. Le point d'appui s'abaisse d'environ 58 cm.

4.2.15
$\overline{AC} = 9.7$

4.2.16
Les trois angles mesurent 90°, 22.5° et 67.5°. Les deux autres côtés mesurent environ 26.13 unités et 24.14 unités.

4.2.17 La hauteur de la tour est d'environ 68.24 m.

4.2.18
La hauteur de la tour est d'environ 31.9 m.

4.2.19
La distance de A à B vaut environ 89 m.

4.2.20
La hauteur du nuage est d'environ 4069.54 m.

4.2.21
L'arbre mesure environ 18.4 m de haut et la rivière 10.6 m de large.

4.2.22
a) 6.50 m ($<$ 40 m) ; b) 3.84 m

4.2.23
a) base : 230.47 m ; arêtes latérales : 219.28 m ; b) 51.85° .

4.2.24
a) $Q(54.4\,;\,-25.4)$; b) diminution de 2 cm ; variation d'un angle de $-149.5°$ ou $210.5°$

Le cercle trigonométrique

4.3.1
cf formulaire.

4.3.2

a) $\cos(270° + t) = \sin(t)$
b) $\sin(-t - 270°) = \cos(t)$
c) $\sin(t - 270°) = \cos(t)$
d) $\cos(t - 270°) = -\sin(t)$
e) $\cos(-\dfrac{19\,\pi}{2} - t) = \sin(t)$
f) $\sin(t + \frac{\pi}{2})\,\cos(\pi - t) - \cos(\frac{\pi}{2} - t)\,\sin(t) = -1$

4.3.3

a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 \cong 56° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 \cong 124° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

c) $t \cong -37° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

d) Pas de solution

e) $t \cong 79.4° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = -20° + k \cdot 120°, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 80° + k \cdot 120°, k \in \mathbb{Z}$

g) $t \cong 14.6° + k \cdot 36°, k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 240° + k \cdot 720°, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -240° + k \cdot 720°, k \in \mathbb{Z}$

4.3.4

a) $t_1 = k \cdot 3\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{3\,\pi}{4} + k \cdot 3\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = \pi + k \cdot 4\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = k \cdot 2\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\,\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

e) $t_1 = \frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{2\,\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{3\,\pi}{4} + k \cdot 2\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = -\frac{3\,\pi}{5} + k \cdot \frac{12\,\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{3\,\pi}{11} + k \cdot \frac{12\,\pi}{11}, \quad k \in \mathbb{Z}$

g) $t = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}, \qquad k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

4.3.5

a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 240° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = 90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = 150° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $z = \pm 115.5° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = 45° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 135° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = 225° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$
$t_4 = 315° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = 41.8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 138.2° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = 38.2° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 141.8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $t_1 = -42.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 222.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = 60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$
$t_4 = -60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3.6

a) $x_1 = 180° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 247.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 36.87° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = 135° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = -90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $t_1 = -39° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 100.9° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = 34.6° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = -16.17° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3.7

a) $t = 71.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad \alpha_2 = 26.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 71.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = 67.5° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = -22.5° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $\varphi_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad \varphi_2 = -11.31° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = 24.6° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 65.4° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3.8

a) $t_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 45° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z}$

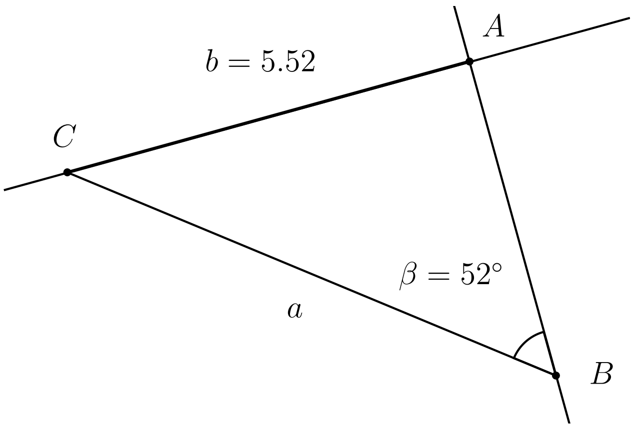
b) $x = 67.5° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \pi/18 + k \cdot 2\,\pi/3,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = 7\,\pi/6 + k \cdot 2\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 7\,\pi/6 + k \cdot 2\,\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = 11\,\pi/6 + k \cdot 2\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Le triangle quelconque

4.4.1



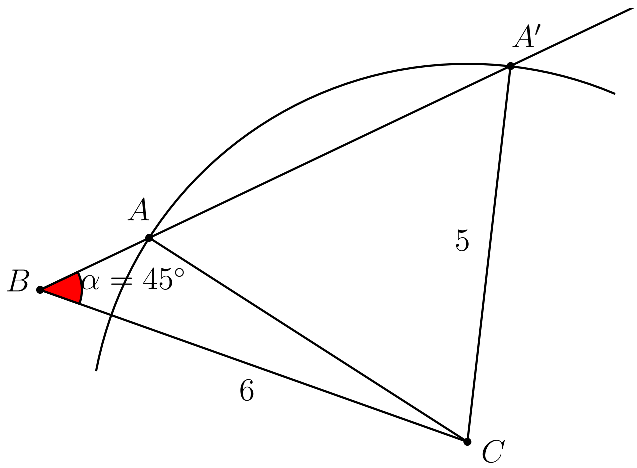
Pour qu'il n'y ait qu'un triangle possible, il faut que $b \simeq 5.52$ cm. Si $b < 5.52$ cm, la construction n'est pas possible. Si $5.52 < b < 7$ cm, il y a deux triangles possibles.
Si $b \geqslant 7$, 1 triangle.

4.4.2

C'est possible.

4.4.3

a) Deux triangles sont possibles:



b) On obtient ici un seul triangle.

4.4.4

	a	b	c	α	β	γ	$\mathcal{A}$
a)	5	6	7	44.4°	57.1°	78.5°	14.7
b)	5	7	8.7 / 2.8	35°	53.4° / 126.6°	91.6° / 18.4°	17.49 / 5.53
c)	4	9	7.4	26.0°	100.0°	54°	14.56
d)	5.9	9.1	8	40°	80°	60°	23.39
e)	6	5	5.0 / 9.8	73.7° / 29.2°	53.1° / 24.0°	53.1° / 126.9°	12
f)	5.5	4	5.3	70°	43.6°	66.4°	10

4.4.5
a) $c = 18.6$, $\alpha = 10.1°$, $\gamma = 155.9°$; b) $a = 18.2/2.2$, $\alpha = 130.8°/5.3°$, $\beta = 27.3°/152.8°$; c) impossible.

4.4.6
$BC \simeq 63.8$ cm ; $BD \simeq 25.4$ cm ; $AD \simeq 56.5$ cm ; $AB \simeq 42.51$ cm.

4.4.7
Le rayon mesure 13.2.

4.4.8
Aire= 23.7 ; $\beta = 101.3°$; $\gamma = 67.3°$; $\delta = 81.4°$.

4.4.9
$BC = 15,3$

4.4.10
L'altitude du sommet C est 1224.13 m.

4.4.12
L'angle α mesure 72° et l'angle β mesure 36°. Le côté AB mesure environ 3.4 cm et le côté DE mesure environ 6.5 cm.

4.4.13
Les diagonales mesurent environ 26.46 et 43.59 unités. L'aire du parallélogramme vaut environ 519.6 unités carrées. Les angles mesurent 64.29° et 115.71°.

4.4.14
Les longueurs des côtés du triangles sont 4, 5 et 6.

4.4.15
L'aire du trapèze vaut 86.6 m.

4.4.16
La surface du pentagone vaut environ 131 059 m^2.

4.4.18
$b_A = 29.32$, $b_B = 42.63$ et $b_C = 51.59$

4.4.19
Le segment AB mesure 2 cm.

4.4.20
$\alpha = 39.1°$, $\beta = 79°$, $\gamma = 61.9°$, $b = 7.8$

4.4.21
Distance AB : 219.17 m

4.4.22
Hauteur du pylône : 9.81 m

4.4.23
5.3 °

4.4.24
Distance de C à S : 502 m ; altitude : 1715 m.

4.4.25
$\theta = 5.2°$; 4.92 m

Chapitre 5

Notions de statistiques

5.1 Un peu de statistique descriptive

5.1.1 Dans chaque situation exposée ci-dessous,

a) décrire la population étudiée ;

b) décrire l'échantillon ;

c) nommer la variable étudiée ;

d) décrire l'ensemble des catégories ou des valeurs de la variable ;

e) donner le type de variable étudiée.

Situation 1
On effectue un sondage auprès de 500 habitants de la ville de Lausanne pour connaître leur chaîne de télévision favorite.

Situation 2
Dans une étude portant sur l'évolution de la situation économique en Suisse de 2000 à 2010, on s'intéresse au taux de chômage annuel de cette décennie.

Situation 3
Afin de déterminer le profil socioéconomique des ménages de la ville de Genève, on a noté le nombre d'enfants par ménage pour un échantillon de 380 ménages.

Situation 4
Selon les données du recensement helvétique de l'an 2000, à la question « Quelle est la langue dans laquelle vous pensez et que vous savez le mieux ? »,

- 63.7% de la population a répondu « l'allemand » ;
- 20.4% de la population a répondu « le français » ;
- 6.5% de la population a répondu « l'italien » ;
- 0.5% de la population a répondu « le romanche » ;
- et 9.0% de la population a cité une langue non nationale ;

5.1.2 On donne ci-dessous la liste des salaires des membres de l'équipe des Boston Celtics pour l'année 2011 à 2012, classés dans l'ordre décroissant.

a) Quelle est la population étudiée ? Quelle est la variable associée à cette population ?

b) Trouver la moyenne et la médiane de l'échantillon.

c) Calculer la variance et l'écart-type de l'échantillon.

d) Calculer le coefficient de variation. Que peut-on dire au sujet de la dispersion de la population étudiée dans cet exercice ?

Player	2011/12
Kevin Garnett	$21,200,000
Paul Pierce	$15,333,334
Ray Allen	$10,000,000
Rajon Rondo	$10,000,000
Rasheed Wallace	$6,790,640
Jermaine O'Neal	$6,226,000
Brandon Bass	$4,000,000
Chris Wilcox	$3,000,000
Keyon Dooling	$2,160,000
Avery Bradley	$1,524,480
Shaquille O'Neal	$1,399,507
Mickael Pietrus	$1,223,166
Marquis Daniels	$1,223,166
Aleksandar Pavlovic	$1,223,166
JaJuan Johnson	$1,042,320
Greg Stiemsma	$762,195
E'Twaun Moore	$473,604
Ryan Hollins	$300,812
Sean Williams	$129,452
TOTALS:	$88,011,842

FIGURE 5.1 – Salaires des joueurs des Boston Celtics

5.1.3 On donne ci-dessous une liste de 98 notes.

a) Dans un tableau, donner le nombre de 1, le nombre de 1.5, le nombre de 2, etc.

b) Calculer la moyenne $\overline{x}$ de l'ensemble de ces notes.

c) Trouver la médiane et le mode de l'échantillon.

d) Calculer la fréquence de chaque note.

e) Calculer la variance et l'écart-type σ de l'échantillon.

f) Quel est approximativement le pourcentage des effectifs compris dans chacun des deux intervalles ci-dessous ?

$$]\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma[\quad \text{et} \quad]\overline{x}-2\,\sigma, \overline{x}+2\,\sigma[$$

g) La répartition de cet échantillon de notes suit-elle à peu près une loi normale ?

```
5    2    1.5  5    5    4.5  4    3.5  4.5
4    4    5    6    6    4    5.5  6    1
5.5  4.5  3.5  6    4    4    4    6
6    6    4.5  5.5  4    3    6    4.5
5    4    4    1    4.5  6    4    3.5
6    3    4.5  6    5    4.5  6    5.5
4.5  3.5  5    6    5    5.5  5    3.5
5    4.5  4    6    5.5  3    6    6
5.5  5    1.5  4    5    3.5  5    6
4.5  4.5  3.5  6    3.5  4.5  6    6
4.5  6    4.5  5    3    3    6    6
5    3.5  4.5  6    5    4    5.5  3
```

5.1.4 On donne ci-dessous une liste de nombres. Ces nombres représentent tous la taille d'un homme de 20 ans, exprimée en centimètres.

a) Grouper les données en dix classes de deux centimètres de large comprises entre 166 et 180 cm.

b) Étudier l'échantillon formé à la question a).

c) Calculer les tailles correspondant à la moyenne augmentée de l'écart-type et à la moyenne diminuée de l'écart-type. Combien de personnes de l'échantillon ont leur taille comprise entre ces deux valeurs ?

d) Faire une brève analyse de la répartition de ces données.

```
171.5 171.5 172.0 177.0 171.0 169.5 176.0 174.5 170.5 175.0 173.5
172.5 172.0 173.0 175.5 176.5 173.0 173.5 171.0 169.5 173.5 171.0
174.0 166.0 173.5 168.0 177.0 170.0 175.0 167.5 176.5 172.5 177.0
172.5 179.5 168.0 175.0 174.0 178.5 167.0 170.5 176.0 172.0 177.0
174.0 171.0 179.0 176.0 170.0 170.0
```

5.1.5 Un maître de mathématiques a fait un travail écrit à ses 24 élèves de première année. On donne ci-dessous la liste du nombre de points obtenus par chacun des élèves de cette classe.

```
54   40   66 64.5 33.5 51.5 58.5 43.5 53.5 59   36  63.5
26.5 42.5 44 40.5 52   59.5 50.5 46.5 46   43.5 71  64
```

a) Grouper les données en dix classes de 5 points de largeur, la première classe débutant à 25 points.

b) Faire un tableau listant les classes, les valeurs centrales, les effectifs et les fréquences associées à ce choix de répartition des donnés.

c) Dessiner l'histogramme correspondant.

d) Grouper les données en cinq classes de 10 points de largeur, la première classe débutant à 20 points.

e) Faire un tableau listant les classes, les valeurs centrales, les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées associées à ce choix de répartition des donnés.

f) Dessiner l'histogramme correspondant.

g) Lequel des deux histogrammes donne une idée claire de la forme de la distribution de l'échantillon étudié ?

h) Pour déterminer l'amplitude et le nombre de classes qu'il faut pour grouper les données d'une série statistique, on peut utiliser la règle de Sturges, qui donne le nombre des classes $C(n)$ en fonction du nombre n de données :

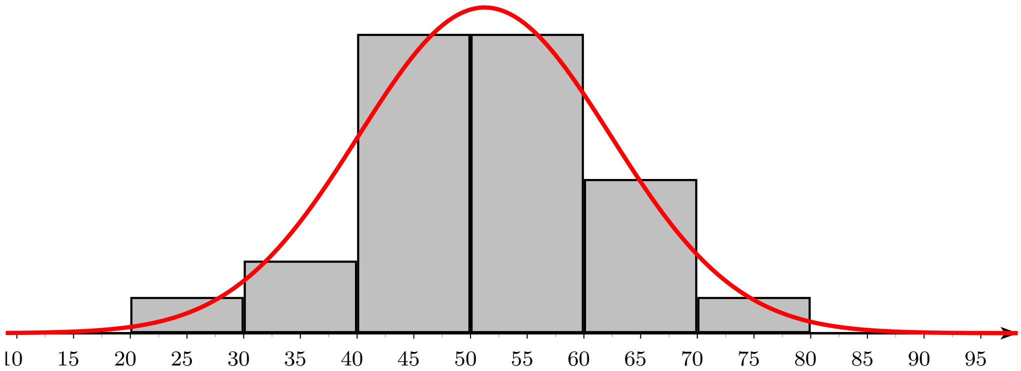
$$C(n) = 1 + \log_2(n)$$

La formule de Sturges est adaptée au cas où l'échantillon suit une *distribution gaussienne* (dite également *distribution normale*).

Calculer le nombre théorique de classes donné par cette formule appliquée à l'échantillon qui nous occupe. Lequel des choix faits au début de l'exercice est le « bon choix » selon Sturges ?

i) En utilisant la répartition des données en cinq classes de largeur 10, calculer la moyenne, l'écart-type et la médiane de l'échantillon. Déterminer également la classe modale.

j) On a dessiné ci-dessous, sur l'histogramme de la question f), une courbe de Gauss correspondant à la moyenne et à l'écart-type de l'échantillon étudié. Commenter la répartition de cet échantillon.



5.1.6 Dans un atelier de production de tiges en acier, un contrôleur est chargé de vérifier le diamètre des tiges à la sortie d'une machine automatique. Il examine pour cela un échantillon de cent tiges. La liste des mesures en mm du diamètre de chaque tige est donnée ci-dessous :

```
10.025 10.064 10.050 10.041 10.062 10.068 10.056 10.050 10.045
10.069 10.052 10.050 10.061 10.034 10.042 10.021 10.063 10.067
10.069 10.040 10.063 10.053 10.052 10.052 10.065 10.054 10.064
10.071 10.075 10.065 10.057 10.051 10.059 10.045 10.040 10.069
10.060 10.030 10.054 10.063 10.048 10.064 10.034 10.065 10.065
10.066 10.029 10.064 10.048 10.054 10.045 10.062 10.039 10.062
10.065 10.056 10.095 10.070 10.055 10.015 10.002 10.030 10.059
10.053 10.064 10.065 10.055 10.061 10.057 10.043 10.051 10.044
10.057 10.055 10.053 10.056 10.045 10.067 10.031 10.036 10.067
10.038 10.061 10.060 10.068 10.046 10.049 10.068 10.051 10.060
10.062 10.020 10.066 10.078 10.047 10.016 10.066 10.012 10.092
10.061
```

a) Regrouper les valeurs en classes de largeur 0.01 mm avec valeur minimale 10 mm et donner le tableau d'effectifs correspondant à cette répartition en classes.

b) Calculer la moyenne $\overline{X}$, la médiane μ et l'écart-type σ à partir de cette répartition en classes.

c) Quel est approximativement le pourcentage des effectifs compris dans chacun des trois intervalles ci-dessous ?

$$]\overline{X}-\sigma,\overline{X}+\sigma[,\quad]\overline{X}-2\,\sigma,\overline{X}+2\,\sigma[,\quad \text{et}\quad]\overline{X}-3\,\sigma,\overline{X}+3\,\sigma[$$

d) Le contrôleur considère que sa machine est bien réglée si les quatre conditions suivantes sont toutes réalisées :

- $10.050 \leq \overline{X} \leq 10.060$,
- $\sigma \leq 0.02$,
- 68% au moins des effectifs sont compris dans l'intervalle $]\overline{X} - \sigma, \overline{X} + \sigma[$,
- 95% au moins des effectifs sont compris dans l'intervalle $]\overline{X} - 2\,\sigma, \overline{X} + 2\,\sigma[$.

La machine est-elle considérée comme bien réglée ?

5.2 Solutions des exercices

Un peu de statistique descriptive

5.1.1

Situation 1

a) *Population :* tous les habitants de la ville de Lausanne.

b) *Echantillon :* les 500 habitants choisis parmi la population totale.

c) *Variable étudiée :* la chaîne de télévision préférée d'une personne.

d) *Ensemble des catégories :* les noms des chaînes que peuvent recevoir les habitants de la ville de Lausanne, pour autant qu'on les retiennent pour le sondage.

e) *Type de variable :* qualitative.

Situation 2

a) *Population :* les années comprises entre 2000 et 2010.

b) *Echantillon :* toute la population est étudiée ici, il n'y a pas d'échantillon.

c) *Variable étudiée :* le taux de chômage.

d) *Ensemble des catégories :* tous les pourcentages compris entre 0% et 100%.

e) *Type de variable :* quantitative continue.

Situation 3

a) *Population :* les ménages de la ville de Genève.

b) *Echantillon :* les 380 ménages sélectionnés.

c) *Variable étudiée :* le nombre d'enfants par ménage.

d) *Ensemble des catégories :* l'ensemble des nombres entiers inférieurs à 20, en tous cas !

e) *Type de variable :* quantitative discrète.

Situation 4

a) *Population :* la population suisse.

b) *Echantillon :* la quasi-totalité de la population suisse.

c) *Variable étudiée :* la première langue d'une personne.

d) *Liste des catégories :* « l'allemand », « le français », « l'italien », « le romanche », « autre langue ».

e) *Type de variable :* qualitative.

5.1.2

a) On étudie le salaire des joueurs d'une équipe de NBA.

b) La moyenne vaut environ 4 632 202 et la médiane 1 524 480.

c) La variance vaut 31 693 364.

d) Le coefficient de variation vaut environ 121.5%. Les données sont donc hétérogènes !

5.1.3

a) –

b) $\overline{x} = 4.617$

c) La médiane est 4.5 et le mode vaut 6.

d) –

e) $\nu \simeq 1.4225$ et $\sigma \simeq 1.1927$

f) Les pourcentages sont 62% et 96% environ.

g) La répartition est proche de celle d'une loi normale.

5.1.4

a) –

b) $\overline{x} = 173.28, \quad \nu = 9.9216, \quad \sigma \simeq 3.15$, la médiane vaut environ 173.17

c) $\overline{x} - \sigma \simeq 170.13, \quad \overline{x} + \sigma \simeq 176.43$, 31 personnes, soit 62% de la population

d) La répartition semble normale.

5.1.5

a) –

b) –

c) –

d) –

e) –

f) –

g) –

h) –

i) $\overline{x} = 51.25, \quad \sigma \simeq 11.11$, la classe moyenne est l'intervalle $[50; 60[$ et la médiane vaut 51.25. Il y a deux classes modales : $[40; 50[$ et $[50; 60[$.

j) –

5.1.6

a) –

b) $\overline{X} = 10.0543, \quad \mu \simeq 10.05731 \quad$ et $\quad \sigma \simeq 0.01551$

c) 78%, 94% et 99%

d) La machine n'est pas bien réglée.