1M6 – Jeudi 6 juin 2019 Nom & prénom : .....

Fonctions – TE n° 735

Problème 1 (8 points)

Déterminer l'ensemble de définition D des fonctions suivantes.

a) $f_1(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 9}$

b) $f_2(x) = \dfrac{-x^2 + 4}{2\,x^2 - 6\,x + 5}$

c) $f_3 = \sqrt{3\,x - 9}$

d) $f_4 = \sqrt{(x-3)(x+4)}$

a) $D = \mathbb{R} - \{-3; +3\}$

b) $D = \mathbb{R}$ $\Delta = 36 - 40 < 0$

c) $3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3$ $D = [3; +\infty[$

d) $D =]-\infty; -4] \cup [3; +\infty[$

Problème 2 (4points)

Déterminer la fonction affine g telle que la pente de son graphe soit égale à $\frac{-4}{3}$ et que $g(-2) = 3$.

$g(x) = -\frac{4}{3}x + h$ ①

$-\frac{4}{3} \cdot (-2) + h = 3$

$h = 3 - \frac{8}{3}$

$h = \frac{1}{3}$ ②

$g(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ ①

Problème 3 (4points)

Déterminer la fonction f dont le graphe est une parabole de sommet $S(-3; -4)$ et dont le graphe passe par le point $A(-6; 2)$.

Mettre la fonction sous la forme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

$f(x) = a(x+3)^2 - 4$

$9a - 4 = 2 \Rightarrow 9a = 6 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{2}{3}(x+3)^2 - 4 = \frac{2}{3}(x^2 + 6x + 9) - 4$

$f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 2$

Problème 4 (6 points)

Établir le tableau des signes de la fonction polynomiale

$$p(x) = x^4 + 2\,x^3 - x^2 + 4\,x - 6$$

$p(1) = 1 + 2 - 1 + 4 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1) \,/\, p$

Par Horner

	1	2	-1	4	-6
1		1	3	2	6
	1	3	2	6	0

$p(x) = (x-1)\underbrace{(x^3 + 3x^2 + 2x + 6)}_{p_1(x)}$ 2

$p_1(-1) = -1 + 3 - 2 + 6 \neq 0$

$p_1(-2) = -8 + 12 - 6 + 6 \neq 0$

$p_1(-3) = -27 + 27 - 6 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+3) \,/\, p_1$

Par Horner

	1	3	2	6
-3		-3	0	-6
	1	0	2	0

1

$p(x) = (x-1)(x+3)\underbrace{(x^2 + 2)}_{\text{pas factorisable}}$ 1

X		-3		1	
p(x)	+	0	−	0	+

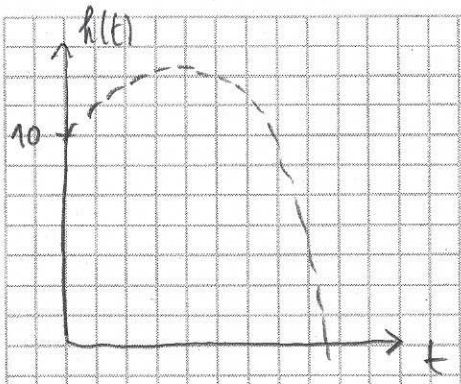
2

Problème 5 (5 points)

Depuis un pont situé à 10 m au-dessus d'une rivière, on lance une pierre verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de 8 m/s. La hauteur h de la pierre (en mètres) au dessus de la rivière en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $h(t) = -4,9\,t^2 + 8\,t + 10$.

a) Déterminer le temps que met la pierre pour arriver dans la rivière.

b) Déterminer la hauteur maximale atteinte par la pierre.



a) $h(t) = -4,9t^2 + 8t + 10$

$h(t) = 0$ avec $t > 0$

$t_1 = \dfrac{-8 - \sqrt{260}}{-9,8} \cong 2,46$ [s] , $t_2 < 0$

b) Sommet de la parabole : $t_0 = \dfrac{-8}{-9,8} = 0,81633$ [s]

hauteur maximale : $h(t_0) \cong 13,26531$ [m]

Problème 6 (8 points)

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x + 2 \leqslant \dfrac{2\,x + 22}{9 - x^2}$

b) $\dfrac{1}{x^2 - 2\,x} > 1 - \dfrac{2}{x}$

a) $D = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$

$$\frac{(x+2)(9-x^2) - 2x - 22}{9-x^2} \leqslant 0$$

$$\frac{9x - x^2 + 18 - 2x^2 - 2x - 22}{9-x^2} \leqslant 0$$

$$\frac{-x^3 - 2x^2 + 7x - 4}{9-x^2} \leqslant 0$$

$$E(x) := \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 9} \leqslant 0$$

$p = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

$p(1) = 1 + 2 - 7 + 4 = 0 \Rightarrow (x-1) / p$

	1	2	-7	4
1		1	3	-4
	1	3	-4	0

$p = (x-1)(x^2 + 3x - 4) = (x-1)(x+4)(x-1)$
$= (x-1)^2(x+4)$

x		-4		-3		1		3	
E(x)	-	0	+	‖	-	0	-	‖	+

$S =]-\infty; -4] \cup]-3; 3[$

b) $\dfrac{1}{x(x-2)} > \dfrac{x-2}{x}$

$$\frac{1 - (x-2)^2}{x(x-2)} > 0$$

$$\frac{(3-x)(x-1)}{x(x-2)} > 0$$

$$E(x) := \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-2)} < 0$$

x		0		1		2		3	
E(x)	+	‖	-	0	+	‖	-	0	+

$S =]0; 1[\cup]2; 3[$

Problème 7 (5 points)

Déterminer la fonction affine $h(x)$ dont le graphe est parallèle à celui de la fonction $g(x) = -x$ et tangent à celui de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

Calculer ensuite le point de contact de ces deux courbes.

$h(x) = -x + a$

Intersection réduite à un point :

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -x + a$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} - a$$

$$x^2 - 4x + 2a - 3 = 0$$

une sol $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$

$$\Delta = 16 - 4(2a-3) = 16 + 12 - 8a = 28 - 8a$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow h(x) = -x + \frac{7}{2}$$

Point de contact :

$$x^2 - 4x + 7 - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 2 \text{ et } y = \frac{3}{2}$$

$$T\left(2; \frac{3}{2}\right)$$

Problème 8 (4 points)

Déterminer une fonction f donnée par son tableau des signes.

x		-3		-1		4	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$

Par exemple $f(x) = \dfrac{-(x+3)^2(x+1)}{(x-4)}$