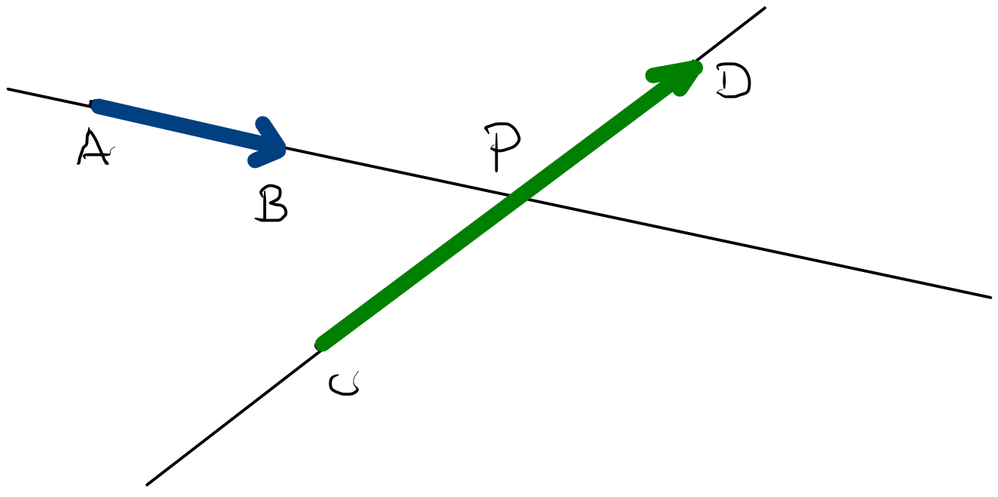
05. 11. 18

1.3.15 Soit $A(-2;14)$, $B(6;-2)$, $C(4;-2)$ et $D(6;10)$. Déterminer le point P d'intersection des droites AB et CD.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}}_{} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + k_0 \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + t_0 \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + t\,\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 + k = 4 + t \\ 14 - 2k = -2 + 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - t = 6 & \Big| \; t \\ -2k - 6t = -16 & \Big| \cdot 1 \end{cases} \quad 2$$

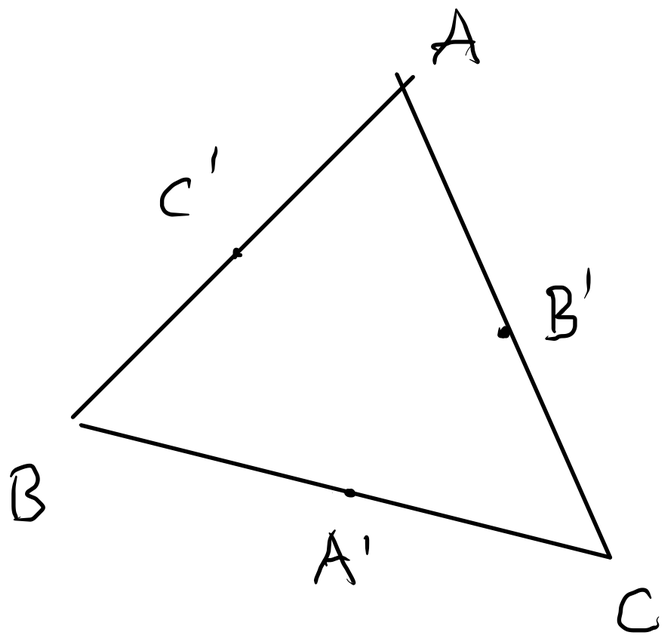
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8t = -4 \\ k = t + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ k = 13/2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13/2 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\frac{9}{2} ; 1\right)}$$

1.3.19 Soit les points $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.



Soit A' le milieu de BC.

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$= \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

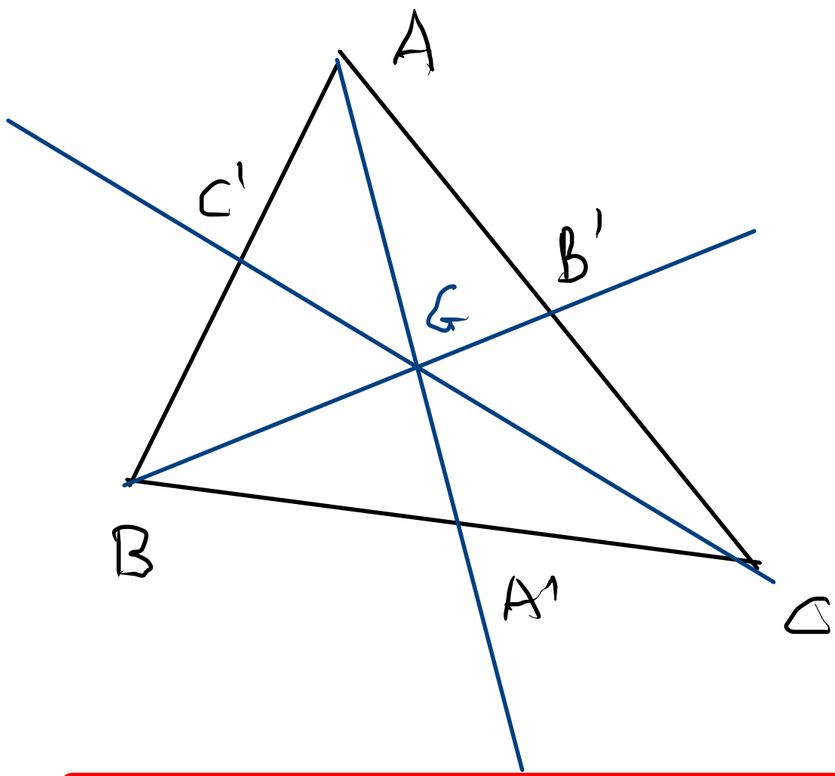
$$\boxed{\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}$$

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3/2\\4\end{pmatrix} \Rightarrow A'\left(\frac{3}{2}\,;\,4\right)$$

$$B'\left(\frac{-4+2}{2}\,;\,\frac{2+5}{2}\right) \Rightarrow B'(-1\,;\,3.5)$$

$$C'(-1.5\,;\,2.5)$$

Déterminons le centre de gravité du triangle :



$$\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{GA'}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AG}$$

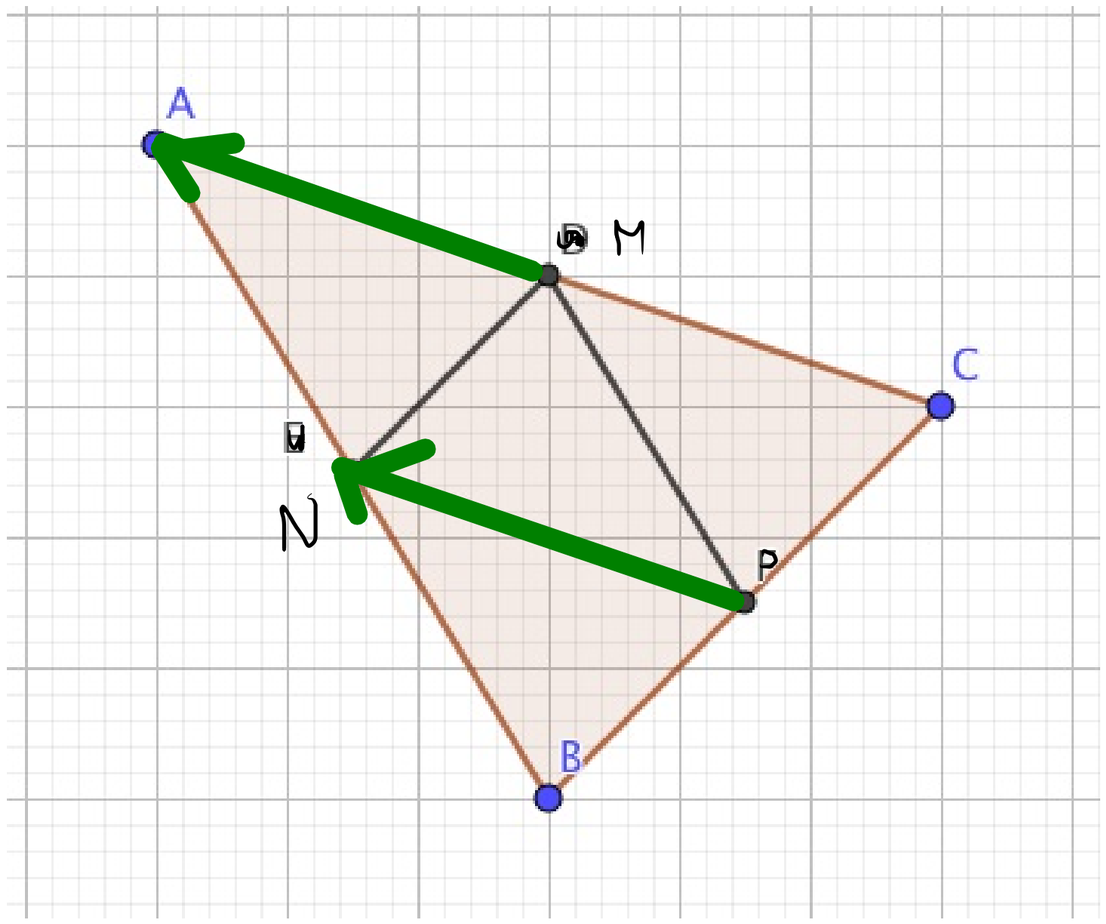
AA

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}$$

$$G\left(\frac{-4+1+2}{3} ; \frac{2+3+5}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\frac{1}{3} ; \frac{10}{3}\right)$$

1.3 18 – 1.3 21

1.3.18 Les points $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.



$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{PN} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(3;1)$$