23.01.19

2.3.13 Déterminer, sans effectuer la division, m et n sachant que :

a) $x^3 + mx + n$ est divisible par $(x-1)(x+2)$,

b) $x^3 + mx^2 + n$ est divisible par $x^2 - x - 6$.

b) Posons $p = x^3 + mx^2 + n$

Factorisons $q = x^2 - x - 6$:

$$q = (x-3)(x+2)$$

Comme $q \mid p$, alors

$$\begin{cases} p(3) = 0 \\ p(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27 + 9m + n = 0 \\ -8 + 4m + n = 0 \end{cases}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} 9m + n = -27 \\ 4m + n = 8 \end{cases} \left| \begin{array}{c} n \\ 1 \\ \cdot(-1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 5m = -35 \\ n = 8 - 4m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} m = -7 \\ n = 36 \end{array}$$

Ainsi $\boxed{p = x^3 - 7x^2 + 36}$

2.3.14 Je suis un polynôme de degré 5 et possède les propriétés suivantes :

1) • je m'annule en 0 et en 2,
2) • je suis divisible par $x+2$,
3) • $x-3$ apparaît dans ma factorisation,
4) • le reste de ma division par $x+3$ est égal à -630,
5) • mon évaluation en $x=1$ est égale à 6.

Qui suis-je ?

Soit $p = a_5 x^5 + a_4 x^4 + \dots + a_0$

1) $p(0) = 0 \Rightarrow x \mid p \Rightarrow a_0 = 0$

$p(2) = 0 \Rightarrow (x-2) \mid p$

2) $(x+2) \mid p \Rightarrow p(-2) = 0$

3) $(x-3) \mid p \Rightarrow p(3) = 0$

4) $p(-3) = -630$

5) $p(1) = 6$

$$p = \underbrace{\overset{1)}{x}\,\overset{1)}{(x-2)}\,\overset{2)}{(x+2)}\,\overset{3)}{(x-3)}}_{\text{degré } 4}\,(ax+b)$$

de 4) : $\underbrace{-3\cdot(-5)\cdot(-1)\cdot(-6)}\,(-3a+b) = -630$

$90\,(-3a+b) = -630 \quad \mid \div 90$

$\boxed{-3a+b = -7}$

de 5) : $\underbrace{1\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-2)}\,(a+b) = 6$

$6\,(a+b) = 6 \quad \mid \div 6$

$\boxed{a+b = 1}$

Résolvons le système

$$\begin{cases} -3a+b = -7 \\ a+b = 1 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} b \\ \cdot(-1) \\ 1 \end{array} \right. \iff \begin{cases} 4a = 8 \\ b = 1-a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Le polynôme cherché est

$$\boxed{P = x(x-2)(x+2)(x-3)(2x-1)}$$

Devoir 1

1) $D = (4x^2 - 8x + 23)\,d + (-63x + 77)$

2) $D = (3x^3 - 2x^2 - 4x + 2)(x - 2) + 9$

3) $S = \left\{ -3 ; -2 ; 2 ; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

2.5.1

d) $(x-6)(x+1)+(2x+3)(x-5)=0$ | CL

$x^2-5x-6+2x^2-7x-15=0$ | CL

$3x^2-12x-21=0$ | $\div 3$

$x^2-4x-7=0$

$\Delta = 16+28=44$

$x_1=\frac{4-\sqrt{44}}{2}=\frac{\cancel{4}^{2}-\cancel{2}^{1}\sqrt{11}}{\cancel{2}_{1}}=2-\sqrt{11}$ | $\sqrt{44}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{11}$

$x_2=2+\sqrt{11}$

$S=\{2-\sqrt{11};\ 2+\sqrt{11}\}$

Changement de variable

h) $2(3x+1)^2 - 32(3x+1) + 126 = 0$ $\quad \div 2$

$(\underbrace{3x+1})^2 - 16(\underbrace{3x+1}) + 63 = 0$ $\quad$ posons $y = 3x+1$

$y^2 - 16y + 63 = 0$

$(y-9)(y-7) = 0$

$y = 9 \Rightarrow 3x+1 = 9$

ou $\quad x = 8/3$

$y = 7 \Rightarrow 3x+1 = 7$

$x = 2$

$S = \left\{ \frac{8}{3} ; 2 \right\}$