24.11.18

1.2.11 Soit $\mathfrak{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\vec{a}; \vec{b}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

b) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}} \iff \vec{a} = 1\,\vec{e_1} + 1\,\vec{e_2}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}} \iff \vec{b} = 2\,\vec{e_1} + 3\,\vec{e_2}$$

a) $$\vec{e_1} = 1\cdot\vec{e_1} + 0\,\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$$

$$\vec{e_2} = 0\cdot\vec{e_1} + 1\,\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$$

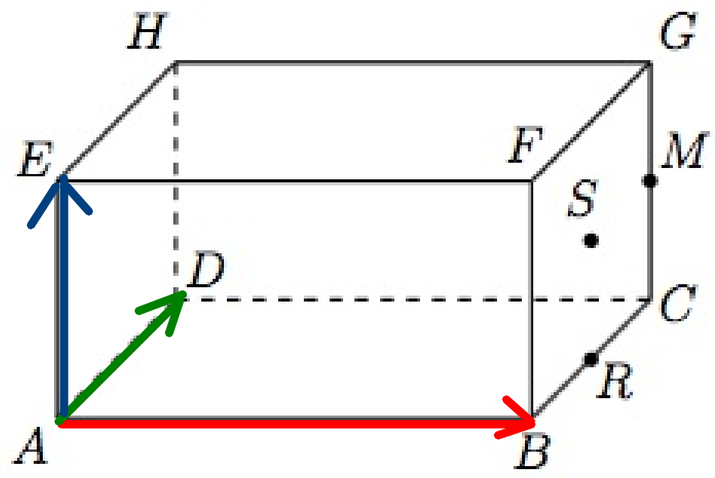
b) $$\begin{cases} \vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{b} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ \cdot 2 & 3 \\ \cdot(-1) & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2\vec{a} - \vec{b} = -\vec{e_2} \\ 3\vec{a} - \vec{b} = \vec{e_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{e_1} = 3\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'} \\ \vec{e_2} = -2\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'} \end{array}$$

$$\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$$

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2.12 On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$ et S est le centre de la face $BCGF$.



a) Donner, relativement à la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$ les composantes des vecteurs

$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AR},\ \overrightarrow{AK}$.

1.2.13 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_3, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Former le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + 2\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c}$.

$$\vec{v} + 2\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

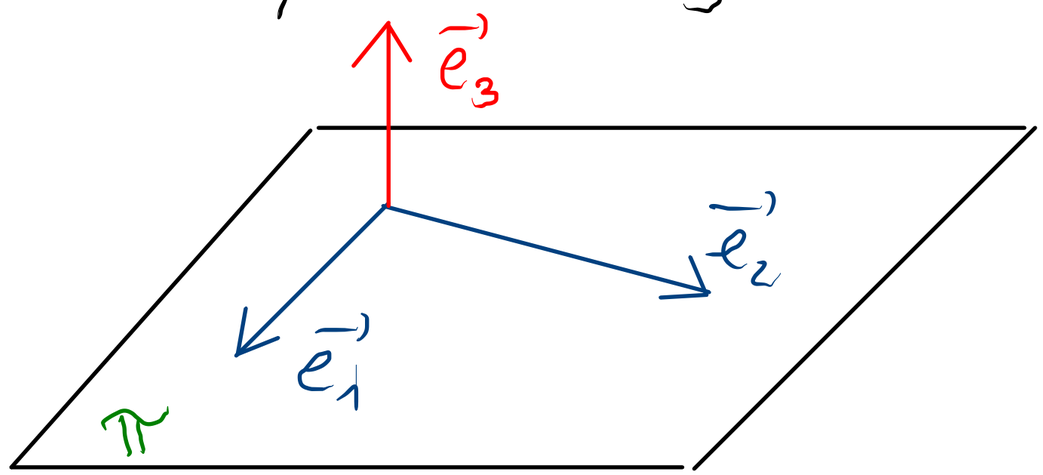
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+12 \\ y-4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+12 = 9 \\ y-4 = 9 \\ z = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 13 \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

Bases de V_3

$\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de V_3

si $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ ne sont pas coplanaires



π est le plan vectoriel engendré par $\vec{e_1}, \vec{e_2}$.

Si $\vec{e_3}$ n'appartient pas à π, alors $\mathcal{B}$ est une base.

Vecteurs coplanaires

$\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires si l'un d'eux est une combinaison linéaire des deux autres.

Par exemple : $K\vec{a} + t\vec{b} = \vec{c}$, $K, t \in \mathbb{R}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ coplanaires}$$

Cherchons un critère pour déterminer si 3 vecteurs sont coplanaires.