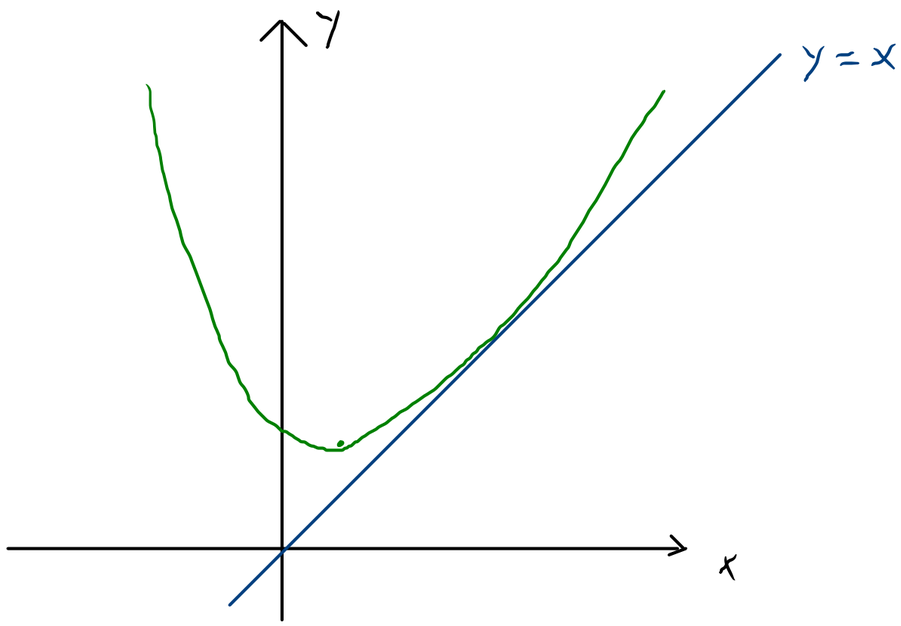
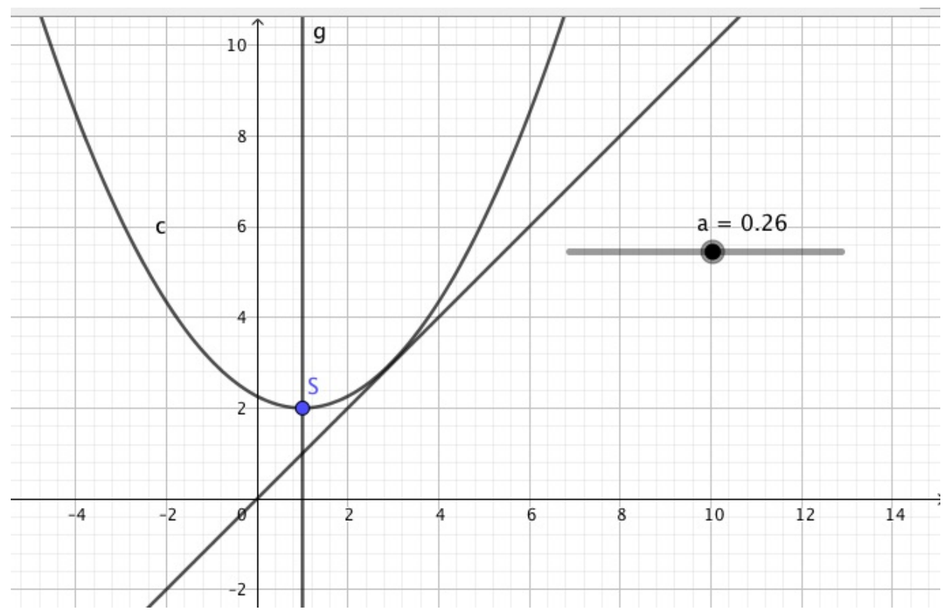
29.05.19

3.4.17 Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole de sommet $S(1;2)$ tangente à la droite $y = x$.





parabole $\quad y = a(x-1)^2 + 2$

droite $\quad y = x$

deux courbes sont tangentes si elles admettent en un point une tangente commune

La condition devient

$$a(x-1)^2 + 2 = x$$

n'a qu'une solution

$$a(x-1)^2 + 2 = x$$

$$a(x^2 - 2x + 1) + 2 - x = 0$$

$$a x^2 - 2ax + a + 2 - x = 0$$

$$a x^2 + (-2a-1)x + (a+2) = 0$$

éq. paramétrique de degré 2 où a est le paramètre

une seule solution $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Delta = (-2a-1)^2 - 4a \cdot (a+2)$$

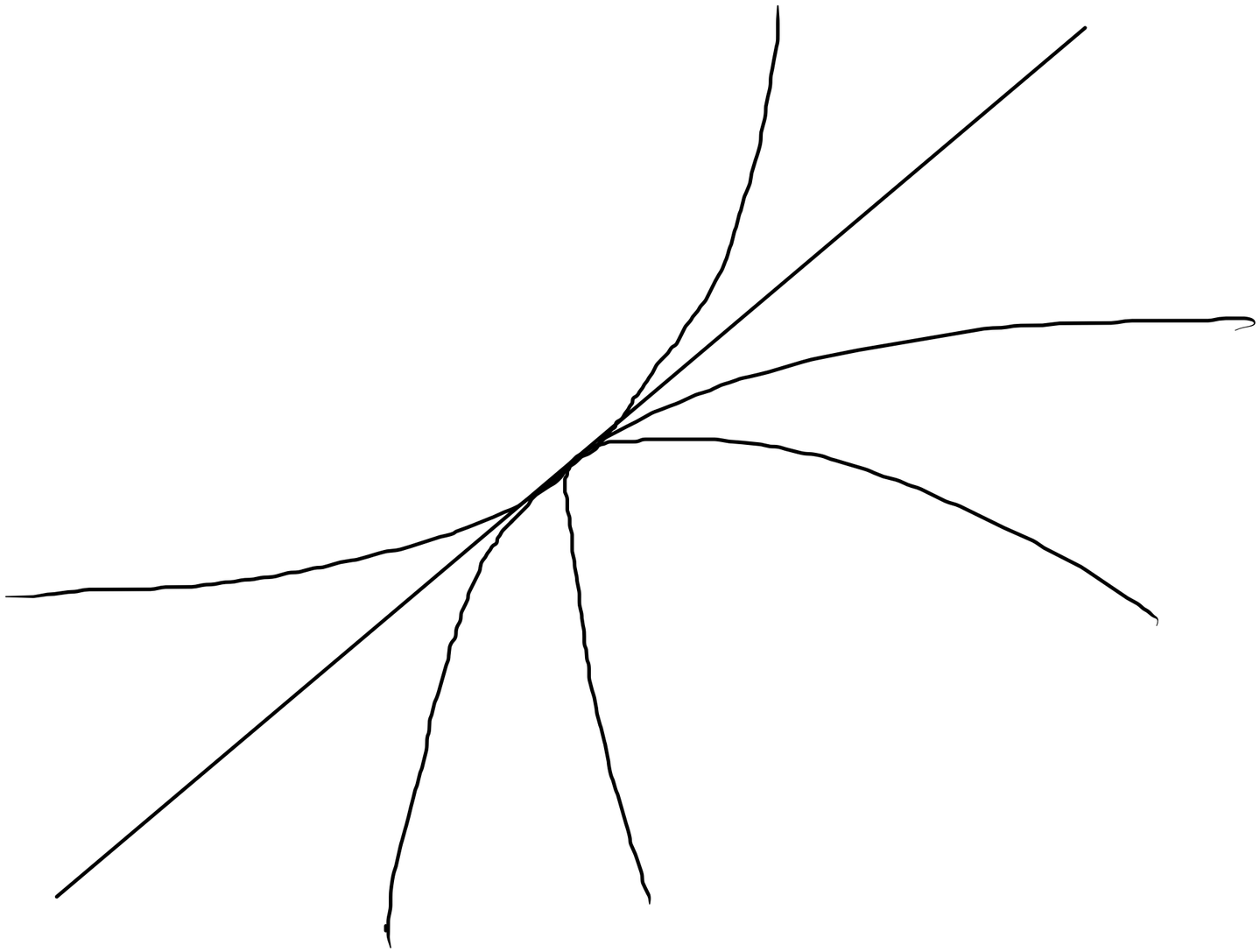
$$= \cancel{4a^2} + 4a + 1 - \cancel{4a^2} - 8a$$

$$= -4a + 1$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -4a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

Finalement $y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 2$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}}$$



3.4.19 Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $x^2 + m\,x + 3 = x$ a-t-elle exactement une solution ?

$\Delta = 0$

$$x^2 + mx + 3 = x$$

$$x^2 + mx + 3 - x = 0$$

$$x^2 + (m-1)x + 3 = 0$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

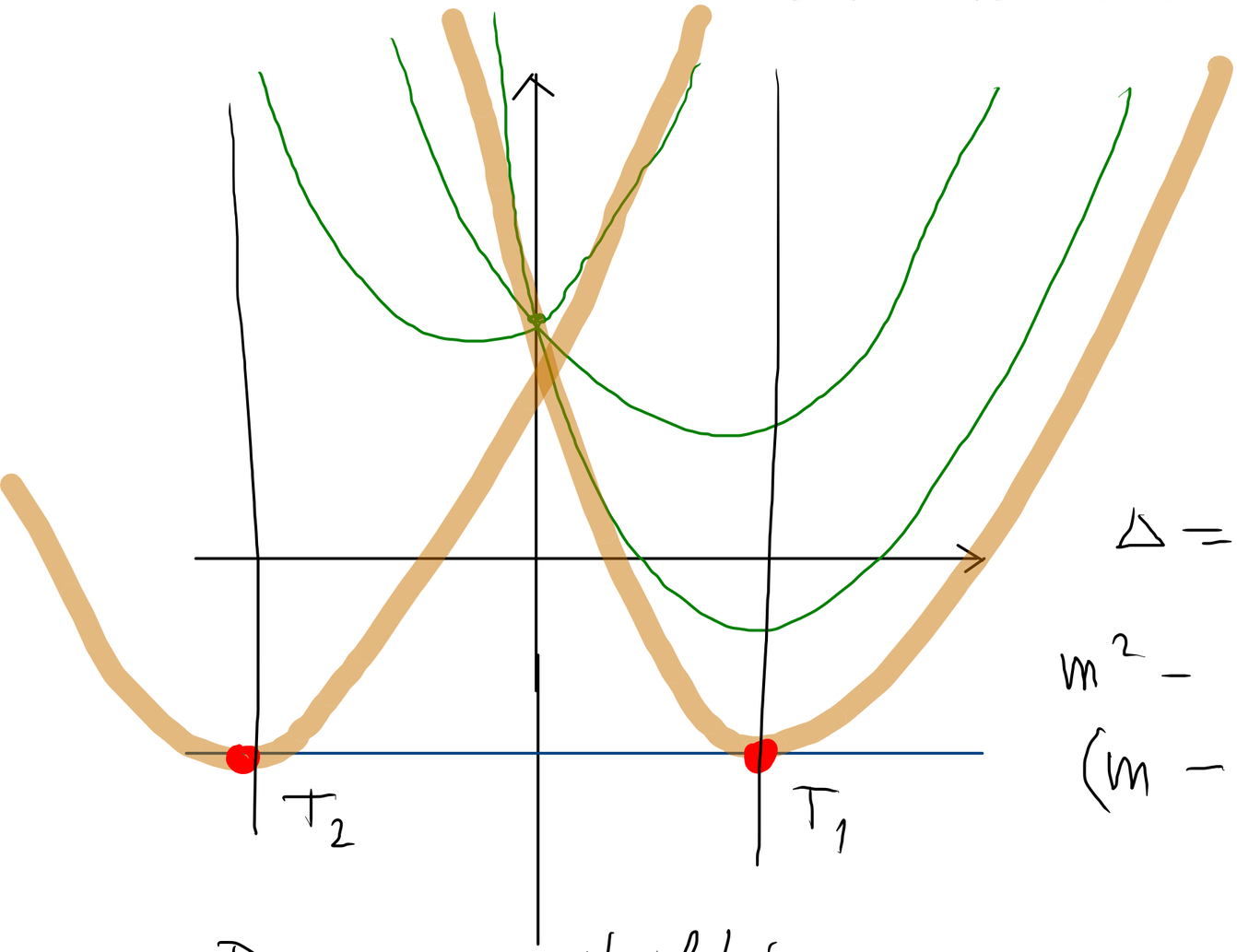
$$= m^2 - 2m + 1 - 12$$

$$= m^2 - 2m - 11$$

$$\Delta_\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 4 + 44 = 48 = 16 \cdot 3$$

$$m = \frac{\cancel{2}^{1} \pm \cancel{4}^{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

3.4.20 Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + m\,x + 5$ est tangent à la droite d'équation $y = -4$.
Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.



$$x^2 + m x + 5 = -4$$
$$x^2 + m x + 9 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$m^2 - 36 = 0$$
$$(m-6)(m+6) = 0$$

Deux possibilités :

1) $m = -6$ $\quad f_1(x) = x^2 - 6x + 5$, $T_1(3;-4)$

2) $m = 6$ $\quad f_2(x) = x^2 + 6x + 5$, $T_2(-3;-4)$

3.4.21

Inéquations rationnelles

3.4.26 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$

b) $\dfrac{x\,(2\,x-3)^2}{x^2-4} < 0$

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$

ED $= \mathbb{R}^* - \{1\}$ *

valeur à exclure

zéro du dénominateur

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0 \; ; \; x = 1$ *

Tableau des signes de $\dfrac{x^2-4}{x^2-x}$

x		-2		0		1		2	
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-x	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x^2-4}{x^2-x}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

*

$x^2-4=0$
$(x-2)(x+2)=0$

$-\cancel{2}$; $+\cancel{2}$

$\cancel{1}$; $\cancel{0}$

$\Vert$ signifie que la valeur est exclue de l'ensemble des solutions (ou de définition)

$$S =]-\infty ; -2[\; \cup \;]0 ; 1[\; \cup \;]2 ; +\infty[$$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1 - x$

$ED = \mathbb{R}^*$

$$\frac{2}{x^2} - 1 + x \geq 0$$

DC : x^2

$$\frac{2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^3}{x^2} \geq 0$$

$$\frac{2 - x^2 + x^3}{x^2} \geq 0$$

$$\frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2}$$

Cherchons les zéros du numérateur

$$p = x^3 - x^2 + 2$$

$$p(1) = 1 - 1 + 2 = 2$$

$$p(-1) = -1 - 1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 1 \,/\, p$$

Divisons p par $x + 1$

	1	−1	0	2
−1		−1	2	−2
	1	−2	2	0

$$p = (x+1)(\underbrace{x^2 - 2x + 2}_{\Delta = 4 - 8 = -4 < 0})$$

L'inéquation s'écrit :

$$\frac{(x+1)(x^2 - 2x + 2)}{x^2} \geq 0$$

x		-1		0		
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	-1
$x^2 - 2x + 2$	$+$		$+$		$+$	
x^2	$+$		$+$	0	$+$	0
$\frac{(x+1)(x^2-2x+2)}{x^2}$	$-$	0	$+$	‖	$+$	

$$S = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$$