MATHÉMATIQUES II

École de maturité

GYMNASE DE BURIER

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 L'ensemble des nombres complexes

1.1.1 Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a + b\,i$:

a) $(1 + 4i) + (2 - 3i)$

b) $(8 + 5i) + (-8 - 5i)$

c) $(1 + i) - (2 - 6i)$

d) $(3 - 5i) + (-2 - 4i) - (1 - 2i)$

e) $3(5 - 2i) + 2(7 - i) - 3(4 - 3i)$

f) $(9 + 5i)(2 - 7i)$

g) $(3 + 2i)(3 - 2i)$

h) $(3 - 4i)^2$

i) $(1 + i)^4$

j) $\dfrac{1}{i}$

k) $\dfrac{1}{2 + 3i}$

l) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

m) $\dfrac{5 + 3i}{2 + 4i}$

n) $\left(\dfrac{63 + 16i}{4 + 3i}\right)^2$

1.1.2 Calculer i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, ... En déduire une formule générale pour i^n, avec $n \in \mathbb{N}$.

1.1.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $2z - 3 + i = 0$

b) $(1 - 4i)z = 6 - 7i$

c) $(1 + 2i)z = (5 - i)z + 7 + 26i$

1.1.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations ci-dessous :

$$\left\{\begin{aligned} (2 + i)z + (2 - i)w &= 7 - 4i \\ (1 + i)z - iw &= 2 + i \end{aligned}\right.$$

1.1.5 Déterminer le conjugué des nombres complexes ci-dessous :

a) $z_1 = 5 - 4i$

b) $z_2 = -8 - i$

c) $z_3 = 2 + 3i$

d) $z_4 = 5 - \dfrac{3}{2}i$

1.1.6 Calculer $(7 - 8i)\overline{(8 - 7i)} - \overline{(4 + 3i)}(4 - 2i)$.

1.1.7 Poser $z = x + yi$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

c) $2\,\Im(\bar{z} + 1) + 2i\,\Re(-z + 2) = -1 - 12i$

1.1.8 Soit z un nombre complexe. Démontrer que

$$z + \bar{z} = 2\,\Re(z), \quad z - \bar{z} = 2\,\Im(z)\,i \quad \text{et} \quad z\bar{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$$

1.1.9 Montrer que si w est une solution de l'équation réelle $az^2 + bz + c = 0$, alors $\bar{w}$ en est une aussi.

1.2 Nombres complexes sous forme trigonométrique

1.2.1 Représenter les points A, B, ..., H dans le plan complexe après avoir calculé, si nécessaire, leurs affixes z_A, z_B, ..., z_H :

a) $z_A = 2 - i$

b) $z_B = -3 + 2i$

c) $z_C = z_A + z_B$

d) $z_D = z_A - z_B$

e) $z_E = \dfrac{z_A + \overline{z_A}}{2}$

f) $z_F = \dfrac{z_A - \overline{z_A}}{2}$

g) $z_G = -z_A$

h) $z_H = -\overline{z_A}$

1.2.2 Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique :

a) 1

b) i

c) -2

d) $-1 - i$

e) $-1 - \sqrt{3}i$

f) $3 + 4i$

1.2.3 Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique :

a) $\left[4; -\dfrac{\pi}{3}\right]$

b) $\left[\dfrac{3}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$

c) $[\pi; -\pi]$

d) $\left[4; \dfrac{\pi}{3}\right]$

e) $\left[1; -\dfrac{\pi}{2}\right]$

f) $e^{i\,\pi}$

1.2.4 Calculer :

a) $\left[2; \dfrac{\pi}{4}\right] \cdot \left[3; \dfrac{\pi}{6}\right]$

b) $\left[6; \dfrac{2\pi}{3}\right] : \left[3; -\dfrac{\pi}{3}\right]$

c) $\left[2; \dfrac{\pi}{3}\right]^3$

1.2.5 Calculer $z_1\,z_2$ et z_1/z_2 en utilisant la forme trigonométrique :

a) $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 1 + i$

b) $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 5\,i$

c) $z_1 = 2\,i, \quad z_2 = -3\,i$

d) $z_1 = -10, \quad z_2 = -4$

1.2.6 Calculer le module $|z|$ des nombres complexes suivants :

a) $z = 2 + 3\,i$

b) $z = 1 + i$

c) $z = 2\,i$

d) $z = -3\,i$

e) $z = -1/2 + \sqrt{3}/2\,i$

f) $z = 5$

g) $z = -6$

h) $z = 0$

i) $z = \cos t + \sin t\,i$

1.2.7 Déterminer les formules de $\sin(4\theta)$ et $\cos(4\theta)$.

1.2.8 Déterminer :

a) la forme trigonométrique des nombres complexes z tel que $z^4 = 1 + i$,

b) la forme algébrique des nombres complexes z tel que $z^4 = 24i - 7$.

1.2.9 Déterminer sous forme trigonométrique et représenter dans le plan complexe :

a) les racines septièmes de l'unité,

b) les solutions de l'équation $z^5 = -32$.

1.2.10 Déterminer sous forme algébrique les racines carrées complexes des nombres ci-dessous :

a) 1

b) i

c) $-i$

d) -9

e) $3+4i$

f) $-5+12i$

1.2.11 Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que le produit, le conjugué et l'inverse d'éléments de U est encore dans U. Est-ce aussi vrai pour la somme, l'opposé et la racine n-ème d'éléments de U ?

1.3 Propriétés algébriques des nombres complexes

1.3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $z^2 = 25$

b) $z^2 = -4$

c) $2z^2 + 10z + 17 = 0$

d) $z^2 + 3z - 5 = 0$

e) $z^2 - 3(1+i)z + 6 + 7i = 0$

f) $(1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5 - 5i = 0$

1.3.2 Décomposer dans $\mathbb{R}[z]$ et $\mathbb{C}[z]$ les polynômes ci-dessous :

a) $z^4 - 1$

b) $z^4 + 1$

c) $z^3 + 1$

d) $z^6 - 1$

e) $z^3 - 6z^2 + 13z - 10$

f) $z^6 + 9z^4 + 27z^2 + 27$

1.3.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $z^4 - (6+3i)z^3 + (8+12i)z^2 = 0$

b) $z^3 + 2z^2 + (-4+4i)z + 16 + 16i = 0$, sachant que -4 est un zéro

c) $z^3 - 4z^2 + (8+i)z - 7 + i = 0$, sachant que $1-i$ est un zéro

1.3.4 Démontrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins un zéro réel.

1.3.5 Soit l'équation

$$3\,z^3 + 2\,z^2 + 7\,z - 20 = 0$$

a) Vérifier que le nombre complexe $u = -1 + 2\,i$ est solution de l'équation ci-dessous.

b) Résoudre complètement l'équation ci-dessus dans $\mathbb{C}$.

c) En déduire une factorisation du polynôme

$$P(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 + 7\,x - 20$$

dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

1.3.6 On considère la fonction complexe f définie sur $\mathbb{C} - \{-i\}$ par

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

a) Déterminer le nombre complexe z tel que $f(z) = i$.

b) Trouver les éléments z invariants par f, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

1.4 Propriétés géométriques des nombres complexes

1.4.1 Dans le plan de Gauss, on désigne par A, B, C et D des points non alignés dont les affixes sont les nombres complexes z_A, z_B, z_C, z_D. Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si

$$z_A - z_B + z_C - z_D = 0$$

1.4.2 Écrire les équations des similitudes suivantes :

a) translation d'affixe $3 - 2i$,

b) homothétie de centre $(0; 0)$ et de rapport -2,

c) homothétie de centre $(3; -2)$ et de rapport 3,

d) rotation de centre $(0; 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

e) rotation de centre $(3; -1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$,

f) symétrie d'axe Oy,

g) symétrie dont l'axe a pour équation $x + y = 0$,

h) symétrie dont l'axe a pour équation $2x - y + 4 = 0$,

i) similitude directe laissant fixe $(0;0)$ et envoyant $P(4;-2)$ sur $P'(12;8)$,

j) similitude indirecte laissant fixe $(3;3)$ et envoyant $U(-2;5)$ sur $U'(0;4)$.

1.4.3 Démontrer que

a) la composition de deux similitudes directes est une similitude directe ;

b) la composition de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

1.4.4 Caractériser géométriquement les similitudes d'équation :

a) $z' = -\bar{z}$

b) $z' = z + 3 - 2i$

c) $z' = i\bar{z} + 3$

d) $z' = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\, z$

e) $z' = (1+i)\,z + 1 - i$

f) $z' = i\bar{z} - 1 + i$

g) $z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} + 4$

h) $z' = (0.6 + 0.8\,i)\bar{z} + \dfrac{2i-1}{\sqrt{5}}$

i) $z' = (1+\sqrt{3}i)\overline{z} + \sqrt{3} - i$

1.4.5 On donne les six points A, B, C, A', B', C' formant deux triangles ABC et $A'B'C'$ semblables. Déterminer l'équation de la similitude envoyant le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$ et la caractériser géométriquement :

a) $A(-2;-3)$, $B(2;-1)$, $C(4;1)$, $A'(0;3)$, $B'(7;4)$ et $C'(11;6)$;

b) $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $A'(2;-1)$, $B'(1;0)$ et $C'(3;0)$.

1.4.6 Soit σ la similitude dont l'équation est $z' = (1-\sqrt{3}i)\bar{z} + 3 + 3\sqrt{3}i$.

a) Quelle est l'image par σ du point d'affixe $1+\sqrt{3}i$?

b) Soit μ la symétrie d'axe $y = \sqrt{3}x$. Donner son équation.

c) Donner l'équation de $\mu\circ\sigma$, puis décrire sa nature. En donner en particulier les points fixes.

1.5 Nombres complexes sous forme exponentielle

1.5.1 Démontrer les formules suivantes. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

a) $\overline{e^{i\,\theta}} = e^{-i\,\theta}$, $|e^{i\,\theta}| = 1$ et $(e^{i\,\theta})^{-1} = e^{-i\,\theta}$

b) $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2\,i}$

1.5.2 Écrire sous forme polaire ($z = r \cdot e^{i\theta}$) les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1 - i$
b) $z_2 = -1 + i$
c) $z_3 = i$
d) $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$
e) $z_5 = -\sqrt{3} - i$

Note : $z = r \cdot e^{i\theta} = r \cdot \text{cis}(\theta)$

1.5.3 Écrire sous forme cartésienne ($z = a + ib$) les nombres complexes suivants :

a) $w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
b) $w_2 = 3e^{-2i\frac{\pi}{3}}$
c) $w_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$
d) $w_4 = 3\,e^{i\pi}$
e) $w_5 = \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$
f) $w_6 = e^{i\pi}$

1.5.4 En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3\,\theta)$ et $\sin(3\,\theta)$.

1.5.5 En utilisant les formules d'Euler, linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$.

1.5.6 Soit A, B, C et D quatre points du plan et z_A, z_B, z_C et z_D leur affixe respectif. Démontrer que la droite AB est perpendiculaire à la droite CD si et seulement si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i \cdot \mathbb{R}^*$.

1.5.7 Calculer les racines cubiques de -8.

1.5.8 Soit $w = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Calculer w^9
b) Calculer $\overline{w}^{-10}$

1.6 Solutions des exercices

L'ensemble des nombres complexes

1.1.1

a) $3 + i$

b) 0

c) $-1 + 7i$

d) $-7i$

e) $17 + i$

f) $53 - 53i$

g) $13 + 0i$

h) $-7 - 24i$

i) -4

j) $-i$

k) $\dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$

l) i

m) $\dfrac{11}{10} - \dfrac{7}{10}i$

n) $119 - 120i$

1.1.2 On a $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1.1.3

a) $S = \left\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{i}{2}\right\}$

b) $S = \{2 + i\}$

c) $S = \{2 - 5i\}$

1.1.4 $z = 3 - i$ et $w = 1 - 2i$

1.1.5

a) $\overline{z}_1 = 5 + 4i$

b) $\overline{z}_2 = -8 + i$

c) $\overline{z}_3 = 2 - 3i$

d) $\overline{z}_4 = 5 + \dfrac{3}{2}i$

1.1.6 $102 + 5i$

1.1.7

a) $S = \left\{\dfrac{4}{13} + i\right\}$

b) $S = \left\{1 \pm 2\sqrt{2}i\right\}$

c) $S = \left\{8 + \dfrac{1}{2}i\right\}$

1.1.8 –

1.1.9 –

Nombres complexes sous forme trigonométrique

1.2.1 –

1.2.2

a) $[1;0]$

b) $\left[1;\dfrac{\pi}{2}\right]$

c) $[2;\pi]$

d) $\left[\sqrt{2};\dfrac{5\pi}{4}\right]$

e) $\left[2;\dfrac{4\pi}{3}\right]$

f) $[5;53,13°]$

1.2.3

a) $2-2\sqrt{3}i$

b) $\dfrac{-3\sqrt{2}}{8}+\dfrac{3\sqrt{2}i}{8}$

c) $-\pi$

d) $2+2\sqrt{3}i$

e) $-i$

f) -1

1.2.4

a) $\left[6;\dfrac{5\pi}{12}\right]$

b) $[2;\pi]$

c) $[8;\pi]$

1.2.5

a) $z_1\,z_2=-2,\quad z_1/z_2=i$

b) $z_1\,z_2=10\,\sqrt{3}-10\,i,\quad z_1/z_2=-2\,\sqrt{3}/5+2/5\,i$

c) $z_1\,z_2=6,\quad z_1/z_2=-2/3$

d) $z_1\,z_2=40,\quad z_1/z_2=5/2$

1.2.6

a) $\sqrt{13}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 3

e) 1

f) 5

g) 6

h) 0

i) 1

1.2.7 $\cos(4\theta)=\cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta)$,
$\sin(4\theta)=4\cos^3(\theta)\sin(\theta)-4\cos(\theta)\sin^3(\theta)$.

1.2.8

a) $\left[\sqrt[8]{2};\dfrac{\pi}{16}\right]$, $\left[\sqrt[8]{2};\dfrac{9\pi}{16}\right]$, $\left[\sqrt[8]{2};\dfrac{17\pi}{16}\right]$, $\left[\sqrt[8]{2};\dfrac{25\pi}{16}\right]$,

b) $2+i,\ -2-i,\ 1-2i,\ -1+2i.$

1.2.9

a) $[1;0],\ \left[1;\dfrac{2\pi}{7}\right],\ \left[1;\dfrac{4\pi}{7}\right],\ \left[1;\dfrac{6\pi}{7}\right],\ \left[1;\dfrac{8\pi}{7}\right],\ \left[1;\dfrac{10\pi}{7}\right],\ \left[1;\dfrac{12\pi}{7}\right],$

b) $\left[2;\dfrac{\pi}{5}\right],\ \left[2;\dfrac{3\pi}{5}\right],\ [2;\pi],\ \left[2;\dfrac{7\pi}{5}\right],\ \left[2;\dfrac{9\pi}{5}\right].$

1.2.10

a) ± 1

b) $\pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

c) $\pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

d) $\pm 3i$

e) $\pm(2+i)$

f) $\pm(2+\ 3i)$

1.2.11 Vrai pour l'opposé et la racine n-ème, faux pour la somme.

Propriétés algébriques des nombres complexes

1.3.1

a) $S=\{\pm 5\}$

b) $S=\{\pm 2i\}$

c) $S=\left\{\dfrac{-5}{2}\pm\dfrac{3}{2}i\right\}$

d) $S=\left\{\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\right\}$

e) $S=\{2-i;1+4i\}$

f) $S=\{3-i;-i\}$

1.3.2

a) $(z^2+1)(z+1)(z-1),$
$(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)$

b) $(z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1),$
$\left(z-\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$

c) $(z+1)(z^2-z+1),$
$(z+1)\left(z-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

d) $(z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1)$,

$$(z+1)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)(z-1)\left(z-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

e) $(z-2)(z^2-4z+5)$,
$(z-2)(z-2-i)(z-2+i)$

f) $(z^2+3)^3$,
$(z+\sqrt{3}i)^3(z-\sqrt{3}i)^3$

1.3.3

a) $S=\{0;4;2+3i\}$

b) $S=\{-4;2i;2-2i\}$

c) $S=\{1-i;2-i;1+2i\}$

1.3.4 –

1.3.5

a) –
b) $\mathcal{S}=\{-1+2\,i;-1-2\,i;4/3\}$
c) $P(x)=(3\,x-4)\,(x^2+2\,x+5)$

1.3.6

a) -1

b) $z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\,(1-i)$ et $z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\,(1-i)$

Propriétés géométriques des nombres complexes

1.4.1 –

1.4.2

a) $z'=z+3-2i$

b) $z'=-2z$

c) $z'=3z-6+4i$

d) $z'=iz$

e) $z'=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}z+3-\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-1)i$

f) $z'=-\bar{z}$

g) $z'=-i\bar{z}$

h) $z'=\dfrac{-3+4i}{5}\bar{z}+\dfrac{-16+8i}{5}$

i) $z'=\dfrac{8+14i}{5}z$

j) $z'=\dfrac{13-11i}{29}\bar{z}+\dfrac{81+159i}{29}$

1.4.3 –

1.4.4

a) symétrie d'axe Oy

b) translation de vecteur d'affixe $3 - 2i$

c) renversement sans point fixe : composition d'une translation d'affixe $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ et d'une symétrie d'axe $2x - 2y - 3 = 0$

d) rotation de centre $(0; 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

e) composition d'une rotation de centre $(1; 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de centre $(1; 1)$ et de rapport $\sqrt{2}$

f) symétrie d'axe $x - y + 1 = 0$

g) renversement sans point fixe : composition d'une symétrie d'axe $(\sqrt{2} - 1)x - y - 2(\sqrt{2} - 1) = 0$ et d'une translation d'affixe $\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}i$

h) symétrie d'axe $2x - 4y + \sqrt{5} = 0$

i) composition d'une homothétie de centre $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; -1\right)$ et de rapport 2 et d'une symétrie d'axe $\sqrt{3}x - 3y - 2 = 0$

1.4.5

a) $z' = \frac{3-i}{2}z+\frac{9+13i}{2}$, composition d'une rotation de centre $(2; -11)$ et d'angle $-18.43°$ et d'une homothétie de centre $(2; -11)$ et de rapport $\frac{\sqrt{10}}{2}$;

b) $z' = (-1 + i)\bar{z} + (2 - i)$, composition d'une d'une symétrie d'axe $(1 - \sqrt{2})x - y + \sqrt{2} - 1 = 0$ et d'une homothétie de centre $(1; 0)$ et de rapport $\sqrt{2}$.

1.4.6

a) $1 + \sqrt{3}i$ (c'est un point fixe)

b) $z' = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\bar{z}$

c) $z' = -2z+3+3\sqrt{3}i$, c'est une homothétie de centre $(1; \sqrt{3})$ et de rapport 2, le point fixe étant $(1; \sqrt{3})$.

Nombres complexes sous forme exponentielle

1.5.1 –

1.5.2

a) $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\,7\pi/4}$
b) $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\,3\pi/4}$
c) $z_3 = e^{i\,\pi/2}$
d) $z_4 = 2\, e^{i\,\pi/3}$
e) $z_5 = 2\, e^{i\,7\pi/6}$

1.5.3

a) $w_1 = \sqrt{3} + i$
b) $w_2 = -3/2 - 3\sqrt{3}/2\, i$
c) $w_3 = \sqrt{3}/2 - 1/2\, i$
d) $w_4 = -3$
e) $w_5 = \sqrt{6}/2 + \sqrt{6}/2\, i$
f) $w_6 = -1$

1.5.4 –

1.5.5 –

1.5.6 –

1.5.7 –

1.5.8

a) -512
b) $-w/2048 = \dfrac{e^{-2\pi/3\, i}}{1024}$

Chapitre 2

Analyse

2.1 Propriétés des nombres réels

2.1.1 Pour chacun des ensembles S ci-dessous, trouver, s'ils existent, le minimum, le maximum, l'ensemble des minorants, l'ensemble des majorants, la borne inférieure et la borne supérieure :

a) $[\,0\,;\,1\,]$ b) $]\,0\,;\,1\,[$ c) $\{\,2\,;\,7\,\}$ d) $\left\{\dfrac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$

e) $\{0\}$ f) $[\,0\,;\,1\,]\cup[\,2\,;\,3\,]$ g) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<0\}$ h) $\{0;1;2;4;8;16\}$

i) $\left\{\dfrac{1}{p}\,|\,p\text{ premier}\right\}$ j) $\{x^3\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ k) $\left\{\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ l) $\{2x-x^2\,|\,x\in[\,2\,;\,+\infty\,[\}$

2.1.2 Soit S un sous-ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$.

a) Prouver que si $\sup(S)$ appartient à S, alors $\sup(S)=\max(S)$.

b) Prouver que si $\inf(S)$ appartient à S, alors $\inf(S)=\min(S)$.

2.1.3 Soit S un sous-ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$.

a) Prouver que $\inf(S)\leq\sup(S)$.

b) Que peut-on dire de S si $\inf(S)=\sup(S)$?

2.1.4 Écrire l'expression $a-\big|a-|a|\big|$ sans utiliser de valeur absolue.

2.1.5 Soit $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\max(x;y)=\frac{x+y+\mid x-y\mid}{2}\quad\text{et}\quad\min(x;y)=\frac{x+y-\mid x-y\mid}{2}$$

2.2 Généralités sur les fonctions

2.2.1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4 - 5x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = (x+4)^2(2+x)$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

2.2.2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{3-2x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{16-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{x^2+x}$

d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-5} + \dfrac{3}{x+1}$

f) $f(x) = \dfrac{-5(4-x)^2}{(1-x^2)(2-x)}$

2.2.3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2-5x+4}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+7x}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2.4 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$g(x) = \sqrt{x^4 - 12\,x^3 + 34\,x^2 + 12\,x - 35}$$

2.2.5 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(7-2x)$

b) $f(x) = e^{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{1-\log(x)}$

d) $f(x) = 3^{1/(x+2)}$

e) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$

f) $f(x) = 10^{-x}$

2.2.6 Calculer dans chaque cas la valeur de $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ et $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Donner ensuite les ensembles de définition des fonctions $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ et $\frac{f}{g}$.

a) $f(x)=3$ et $g(x)=x^2$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x+5}$

c) $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\sqrt{4x}$

d) $f(x)=\ln(x)$ et $g(x)=\ln(1-x)$

2.2.7 Soit f, g et h trois fonctions définies par $f(x)=2x$, $g(x)=2x-1$ et $h(x)=x^2$. Calculer :

a) $(f\circ g)(x)$

b) $(h\circ f)(x)$

c) $(g\circ h\circ f)(x)$

2.2.8 Dans chacun des cas suivants, donner $(f\circ g)(x)$, $D_{f\circ g}$, $(g\circ f)(x)$, $D_{g\circ f}$.

a) $f(x)=x^2-3x$ et $g(x)=\sqrt{x+2}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{3x+2}$ et $g(x)=\dfrac{2}{x}$

2.2.9 Les fonctions f suivantes sont des fonctions composées. Donner une décomposition possible de f en deux fonctions : $f=g\circ h$.

a) $f(x)=\sqrt{3x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+3}$

c) $f(x)=(x+2)^7$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-4}$

e) $f(x)=\log(x^2+4)$

f) $f(x)=3^{2x-5}$

2.2.10 Tracer le graphe des fonctions suivantes :

a) $f(x)=2$

b) $f(x)=\dfrac{2}{5}x$

c) $f(x)=x+4$

d) $f(x)=3x-6$

e) $f(x)=-2x+3$

f) $f(x)=x^2+x-2$

g) $f(x)=4-x^2$

h) $f(x)=x^2-2x+3$

i) $f(x)=-2x^2-7x+4$

j) $f(x)=x^2+4x+4$

2.2.11 Tracer dans le même système d'axes les graphes des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x \ , \ f_2(x) = x^2 \ , \ f_3(x) = x^3 \ , \ f_4(x) = x^4 \ , \ f_5(x) = x^5$$

2.2.12 Esquisser le graphe des fonctions données par :

a) $f(x) = 3^x$ et $g(x) = \log_3(x)$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ et $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

c) $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$

d) $f(x) = 10^{-x}$ et $g(x) = \log_{0,1}(x)$

2.2.13 Esquisser le graphe des fonctions données par :

a) $f(x) = E(2x)$

b) $f(x) = E\left(\dfrac{x}{3}\right)$

c) $f(x) = x \cdot E(x)$

d) $f(x) = \mathrm{sgn}(x^3 - 4x)$

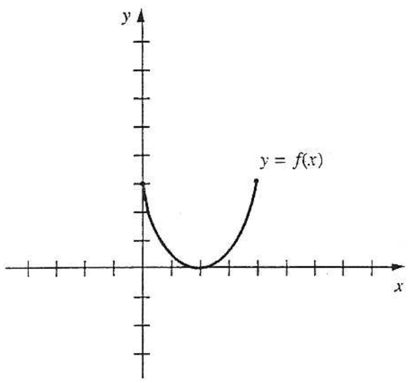
e) $f(x) = (\mathrm{sgn}(x))^2$

f) $f(x) = x \cdot |x|$

g) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

h) $f(x) = \sqrt{|x|}$

2.2.14 Dans le système d'axes ci-dessous, esquisser les courbes :



a) $y = f(x+3)$
b) $y = f(x-3)$
c) $y = f(x) + 3$
d) $y = f(x) - 3$
e) $y = -3f(x)$
f) $y = -\frac{1}{3}f(x)$
g) $y = -f(x+2) - 3$
h) $y = f(x-2) + 3$

2.2.15 Tracer le graphe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = |x| - 2$, $g(x) = |x| + 1$, $h(x) = |x-3|$, $k(x) = |x+1|$ et $l(x) = -|x| + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$ et $h(x) = \sqrt{x-1} - 4$

c) $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ et $g(x) = \frac{1}{x-2}$

d) $f(x) = 2^x - 2$, $g(x) = 2^{x+1}$ et $h(x) = -2^x$

e) $f(x) = \ln(x-1)$, $g(x) = 2\ln(x)$, $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $k(x) = |\ln(x)|$

f) $f(x) = 2 + \sin(x)$ et $g(x) = |\cos(x)|$

2.2.16 Tracer le graphe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = |4 - x^2|$

b) $f(x) = ||x+4| - 2| + 1$

c) $f(x) = |x^2 - 2x| - 1$

d) $f(x) = |x-1| + |x+2|$

2.2.17 Représenter le graphe des fonctions définies par :

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{, si } x \leq -1 \\ x^3 & \text{, si } -1 < x < 1 \\ -x+3 & \text{, si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{, si } x > 0 \\ 0 & \text{, si } x \leq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{, si } x \neq -1 \\ 3 & \text{, si } x = -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, si } x < 0 \\ 3x & \text{, si } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{, si } x \geq 1 \end{cases}$

2.2.18 Quelles valeurs doit-on attribuer à a et à b pour que le graphe de f puisse être tracé « sans lever le crayon » ?

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{, si } x < -5 \\ ax+b & \text{, si } -5 \leq x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{, si } x > -1 \end{cases}$$

2.2.19 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre :

a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 2x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x^2 + 8x + 2$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{2x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x}{x-2}$

h) $f(x) = x^6 + 3x^2 - \frac{1}{x}$

i) $f(x) = \sqrt{x}$

j) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

k) $f(x) = |x^3 - 3x| + 1$

l) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 1}$

m) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

n) $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

2.2.20 Quelle est la parité des fonctions $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ et $g \circ f$ si :

a) f et g sont deux fonctions paires ?

b) f et g sont deux fonctions impaires ?

c) f est une fonction paire et g une fonction impaire ?

2.2.21 Calculer $f(x+h) - f(x)$ si :

a) $f(x) = x^2 + 2\,x - 16$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$

c) $f(x) = \sqrt{2\,x - 7}$

2.2.22 Soit $f(x) = 2\,x^2 + 8\,x$. Montrer que pour tout nombre réel a, $f(2\,a) = 2\,f(a) + 4\,a^2$.

2.3 Fonctions injectives, surjectives et bijectives

2.3.1 Déterminer les applications injectives, surjectives ou bijectives.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2\,x+1 \end{array}$

d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

g) $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

e) $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

h) $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$

f) $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+2 \end{array}$

i) $f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,x+1 \end{array}$

j) $f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

k) $f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x^2 \end{array}$

l) $f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

m) $f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

n) $f_{14} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$

o) $f_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log(x) \end{array}$

2.3.2 Définir l'application réciproque des bijections.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3\,x \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,x + 3 \end{array}$

d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

e) $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

f) $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x - 3 \end{array}$

g) $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{1\} & \to & \mathbb{R} - \{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2\,x + 1}{x - 1} \end{array}$

h) $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{1\} & \to & \mathbb{R} - \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x + 1}{x - 1} \end{array}$

2.3.3 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que les fonctions suivantes soient des bijections. Puis donner leur réciproque.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^2 + x - 6$
c) $f(x) = -\,x^2 + 4\,x$
d) $f(x) = \cos(x)$
e) $f(x) = \tan(x)$
f) $f(x) = \sin(2\,x)$

2.3.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

a) f est-elle injective ? surjective ?
b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [\,-1\,;\,1\,]$.
c) Montrer que la restriction $g : [\,-1\,;\,1\,] \to [\,-1\,;\,1\,]$, définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

2.3.5 Soit $f : [\,1\,; +\infty\,[\to [\,0\,; +\infty\,[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. La fonction f est-elle bijective ?

2.4 Suites de nombres réels

2.4.1 Calculer les quatre premiers termes des suites :

a) $\dfrac{n}{n+2}$, avec $n \geq 1$

b) $1 + (-1)^n$, avec $n \geq 1$

c) $n \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, avec $n \geq 1$

d) $\sqrt{n^2+3n} - n$, avec $n \geq 1$

2.4.2 Calculer les quatre premiers termes des suites :

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - 2}{3} \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

2.4.3 Trouver les termes généraux des suites :

a) 4 7 10 13 16 ...

b) 2 8 18 32 50 ...

c) $1 \quad -\dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{3} \quad -\dfrac{1}{4} \quad \dfrac{1}{5} \quad ...$

d) $-\dfrac{1}{2} \quad 0 \quad \dfrac{1}{4} \quad \dfrac{2}{5} \quad \dfrac{3}{6} \quad ...$

e) -3 9 -27 81 -243 ...

f) $1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt[5]{5} \quad ...$

2.4.4 Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = 2 - \dfrac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$

b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$

c) $c_n = 2n^2 - 7n$, avec $n \geq 2$

d) $d_n = \dfrac{n}{n^2+10}$, avec $n \geq 3$

e) $e_n = 3^{1+(-1)^n}$, avec $n \geq 1$

f) $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 1 + 2f_n \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

2.4.5 Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et $\epsilon > 0$. Si on accepte que la suite converge vers L, trouver le plus petit entier positif N tel que $\mid u_n - L \mid < \epsilon$, pour tout $n > N$.

a) $u_n = \dfrac{3}{n-2}$, avec $L = 0$ et $\epsilon = 0,1$

b) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, avec $L = 1$ et $\epsilon = 0,25$

En considérant ϵ quelconque, démontrer que les suites ci-dessus sont convergentes.

2.4.6 Calculer :

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n-1}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1-n^2}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2n(-1)^n}{n}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^4}{(1-n^2)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{\sqrt{n^4-5}}$

2.4.7 A l'aide du théorème des deux gendarmes, calculer :

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{n^2}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E(nx)$, avec $x\in\mathbb{R}_+^*$

2.4.8 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1=\sqrt{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{2u_n}\ ,\ \text{si } n\geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 2.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

2.4.9 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+1}\ ,\ \text{si } n\geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par 0.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

2.4.10 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}\ ,\ \text{si } n\geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que $u_n<4$, pour tout $n\geq 1$.

b) Montrer que $u_{n+1}^2-u_n^2=(4-u_n)(3+u_n)$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

2.4.11 Calculer :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3}{4n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \dfrac{1}{1-n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-3^{n-1}}{2+3^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2+\dfrac{2n+n^2-n^3}{n-1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+...+n}{n^2}$

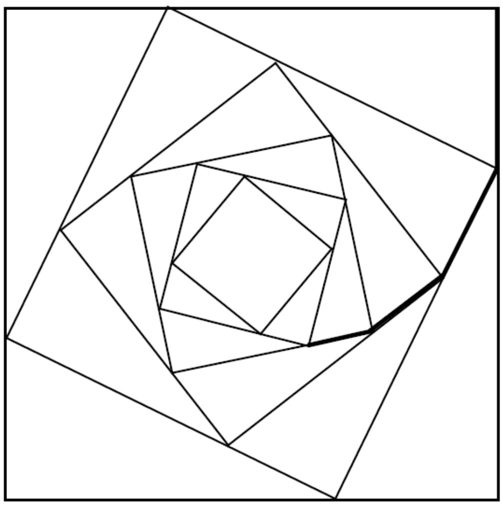
2.4.12 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+12}{4}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

a) On pose $v_n = a_n - 4$. Démontrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique.

b) Donner le terme général de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$, puis calculer sa limite.

2.4.13 Dans un carré dont le côté vaut 1, on inscrit un cercle, dans le cercle un carré, et on répète l'opération. Calculer la somme des aires des carrés.

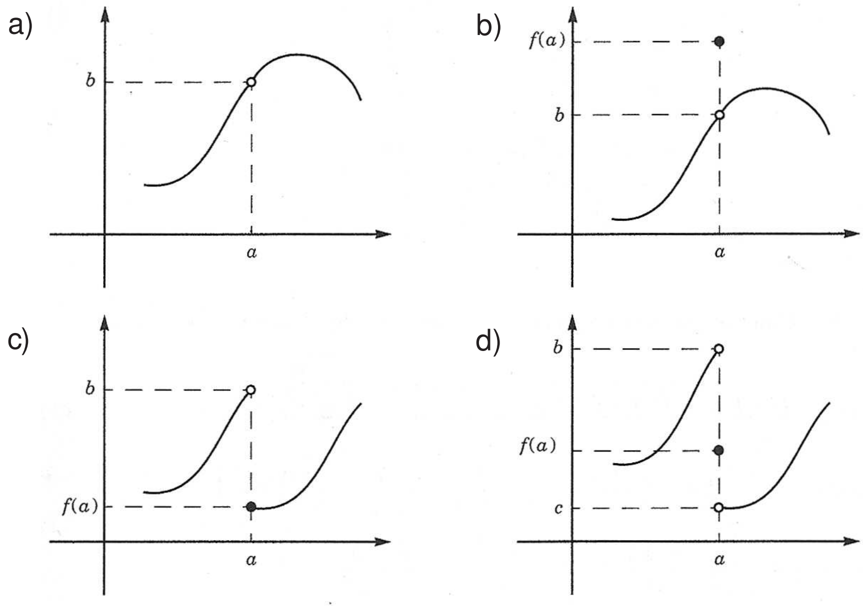
2.4.14 Dans un carré de coté 1, on trace un carré dont les sommets sont situés au tiers des côtés du carré initial, et on répète l'opération. Calculer la longueur de la spirale dont les premiers segments sont tracés en gras ci-après :



2.4.15 On construit une spirale à l'aide d'une série de demi-cercles. Le diamètre du premier demi-cercle vaut 1 alors que le diamètre de chacun des demi-cercles suivants est égal aux trois quarts de celui du cercle précédent. Quelle est la longueur de la spirale et autour de quel point s'enroule-t-elle ?

2.5 Limites de fonctions

2.5.1 Lire les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.



2.5.2 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1}(4x^3-2x^2+x-1)$

b) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-5x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3x^2}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}(-5)$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-5}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+x^2+x}$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)+1}{2-\tan(x)}$

2.5.3 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2x-6}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{100x^2}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+4)(x-2)}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

f) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-16}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-4x^2-7x+10}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^2+3x-4}$

2.5.4 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

b) $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+h}}{h}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

f) $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{1+\sqrt{t-2}}{t}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$

h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}}$

2.5.5 Calculer, si elles existent, la limite à gauche, la limite à droite et la limite des fonctions suivantes pour x tendant vers x_0 :

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} \qquad x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{|x|} \qquad x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{|x|} \qquad x_0 = 0$

d) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2} \qquad x_0 = 2$

2.5.6 Utiliser le théorème « des deux gendarmes » pour déterminer :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

2.5.7 Montrer que si $0 \leq f(x) \leq 3$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot f(x)) = 0$.

2.5.8 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(7x)}{\sin(3x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

2.5.9 En amplifiant chaque fraction par $\cos(x)+1$, montrer que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

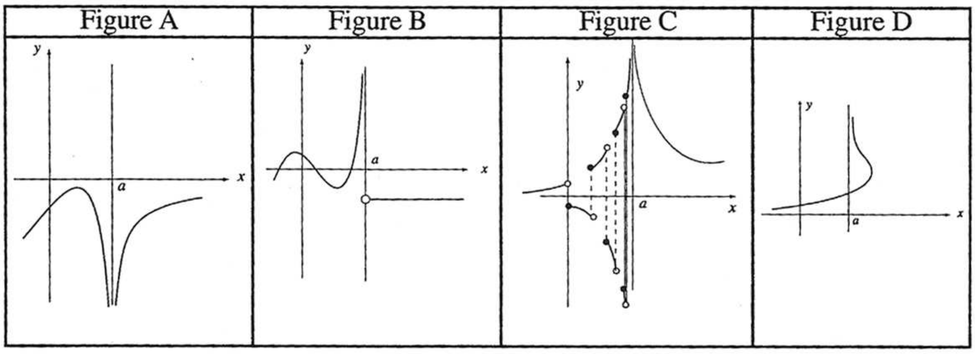
2.5.10 Trouver une fonction f non définie en a telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$:

a) $a=2$ et $b=3$ b) $a=-1$ et $b=7$

2.5.11 On donne la parabole d'équation $y=x^2$. Pour tout point M de la courbe (distinct de l'origine O), on trace la médiatrice du segment $[OM]$. Celle-ci coupe l'axe des ordonnées en un point N. Vers quelle valeur tend l'ordonnée du point N lorsque le point M tend vers O ?

2.5.12 Calculer la valeur limite de la solution la plus proche de zéro de l'équation $ax^2 + 3x + 1 = 0$ lorsque le coefficient a tend vers 0.

2.5.13 Dire pour chacune des quatre figures ci-dessous quelles sont les notations autorisées parmi 1), 2), ..., 9) :



$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} 1) & \infty \\ 2) & +\infty \\ 3) & -\infty \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \begin{cases} 4) & \infty \\ 5) & +\infty \\ 6) & -\infty \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \begin{cases} 7) & \infty \\ 8) & +\infty \\ 9) & -\infty \end{cases}$$

2.5.14 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+6}{(x+2)^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x^3}$

d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 5\\ >}} \frac{x-3}{5-x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2x^2-5x+3)\frac{1}{x-1}$

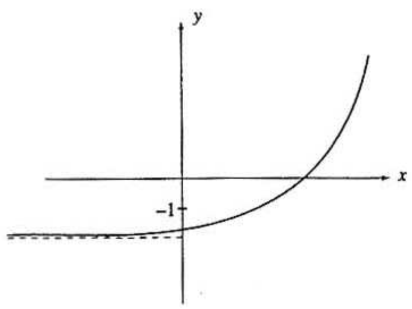
f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{x-1}{x+2}$

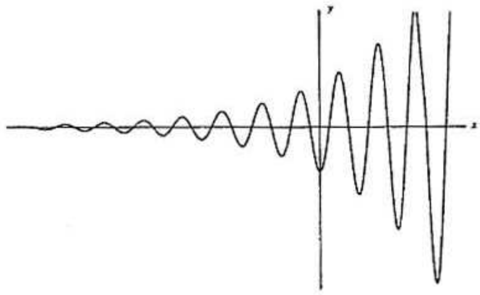
h) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$

2.5.15 Lire les limites : $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x)$.

a)



b)



2.5.16 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2x-4}{-3x+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^2+1}{x+2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+4x+29}{x^2-2x+4}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(3x+4)(x-1)}{(2x+7)(1-5x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(x+1)^7(2x+3)^4}{(2x+1)^3(x-98)^8}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x^2-1}{x-1}+1-2x\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-x^3}{3x+1}+x-1\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1+5x-3x^2}{x-2}+3x+1\right)$

2.5.17 Calculer, si elles existent, $\lim\limits_{x \to -\infty}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}$ pour les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 5}}{x + 3}$

e) $f(x) = 2x - \cos(x)$

f) $f(x) = \dfrac{2x - \cos(x)}{x - 1}$

g) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

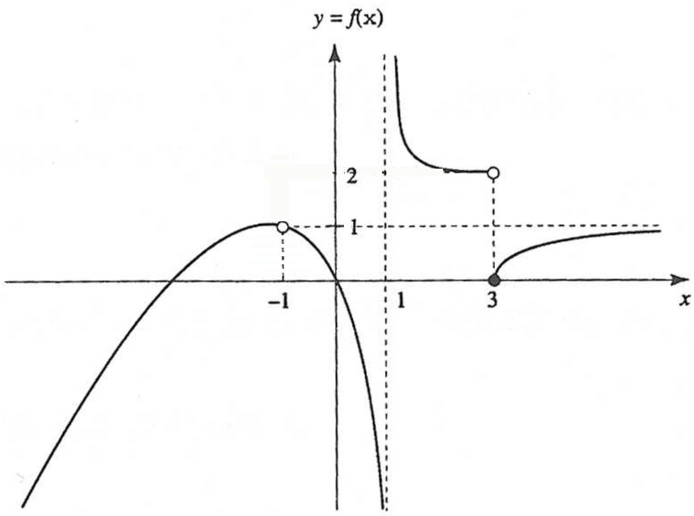
h) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2.5.18 Représenter le graphe d'une fonction pour laquelle toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = 0$.

2.6 Continuité

2.6.1 Déterminer la nature des discontinuités de la fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous :



2.6.2 Déterminer la nature des discontinuités des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-5x}{x^4-5x^3}$

e) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{, si } x \leq -1 \\ 4-2x & \text{, si } x > -1 \end{cases}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

2.6.3 Sur quel ensemble les fonctions ci-dessous sont-elles continues ?

a) $f(x) = \dfrac{x^4+17}{6x^2+x-1}$

b) $f(x) = 2x + \sqrt{25-x^2}$

c) $f(x) = \arcsin(x^2-1)$

d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2+x)$

e) $f(x) = E(x) - x$

f) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2.6.4 Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ possède une solution dans $[0;1]$.

2.6.5 Étudier le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -x + \sqrt{5x-4}$

b) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{|\, x+1 \,|}{x^2}$

d) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, sur $[0;2\pi]$

2.7 Asymptotes

2.7.1 Pour les fonctions suivantes, on demande : l'ensemble de définition, les asymptotes (avec étude de position) et le tracé du graphe.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+6x}{(x+2)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}$

2.7.2 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes des fonctions f données par :

a) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{(x-3)^2}}$

e) $f(x) = 2x - 3 - \sqrt{4x^2 + 6x}$

f) $f(x) = \dfrac{3x - \sqrt{9x^2 + 2x + 1}}{2x}$

2.7.3 On considère les 12 fonctions rationnelles :

$f_1(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2+1}$ $\quad f_2(x) = -2x + 5 + \dfrac{1}{x+1}$ $\quad f_3(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

$f_4(x) = \dfrac{1}{x-7}$ $\quad f_5(x) = \dfrac{2x}{x-7}$ $\quad f_6(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+10)}$

$f_7(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\quad f_8(x) = -2x + 5 + \dfrac{1}{x-5}$ $\quad f_9(x) = 1 + \dfrac{7}{x^2-4}$

$f_{10}(x) = 1 + \dfrac{7}{x^2+4}$ $\quad f_{11}(x) = -2x + 5 + \dfrac{1}{x^2+5}$ $\quad f_{12}(x) = \dfrac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$

Déterminer, sans aucun calcul, parmi les fonctions rationnelles proposées ci-dessus, laquelle est caractérisée par les asymptotes suivantes :

	Asymptote verticale	*Asymptote horizontale ou oblique*
1)	$x = -1$	$y = 0$
2)	$x = -1,\ x = -10$	$y = 2$
3)	aucune	$y = 2$
4)	$x = 7$	$y = 2$
5)	$x = -2,\ x = 2$	$y = 1$
6)	$x = 5$	$y = -2x + 5$
7)	$x = -1$	$y = 2$
8)	aucune	$y = 1$
9)	$x = -1$	$y = -2x + 5$
10)	$x = 7$	$y = 0$
11)	aucune	$y = -2x + 5$
12)	$x = -1,\ x = -10$	$y = 0$

2.7.4 Trouver une fonction admettant les asymptotes suivantes :

a) $x = -4$, $x = 2$, $y = 3$

b) $y = 2x - 5$, $x = 1$

2.7.5 Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^n + 3}{x^2 - 9}$.

2.7.6 Déterminer a, b et c sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 + bx + c}$$

admet les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 1$ comme asymptotes.

2.7.7 Déterminer a, b et c sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + c}$$

admet les droites $x = 3$ et $y = x + 2$ comme asymptotes.

2.7.8 Déterminer a, b, c et d sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

dont le graphe passe par le point $A(2; -2)$ et qui admet les droites $x = -3$ et $y = -2x + 1$ comme asymptotes.

2.8 Dérivées

2.8.1 Calculer $f'(x)$, à partir de la définition de la dérivée, si :

a) $f(x) = 4$

b) $f(x) = 2x - 5$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x + 1}$

f) $f(x) = \sqrt{x - 3}$

2.8.2 On donne la fonction $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Calculer sa dérivée.

b) En déduire les pentes des tangentes au graphe de f aux points où il coupe les axes de coordonnées.

c) Représenter le graphe de la fonction, ainsi que les tangentes dont on a calculé la pente.

2.8.3 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en a ?

a) $f(x) = \mid x-2 \mid \ , a = 2$

b) $f(x) = x\sqrt{\mid x \mid} \ , a = 0$

c) $f(x) = \sqrt{1+\sin(2x)} \ , a = -\dfrac{\pi}{4}$

d) $f(x) = \mid x^2 - 1 \mid -2 \ , a = -1$

2.8.4 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \text{si } x < 0 \\ 0 & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2.8.5 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \text{si } x < 0 \\ 0 & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

2.8.6 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculer la dérivée de f en $a \in]-1;1[$, puis étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

2.8.7 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 47$

b) $f(x) = 3x$

c) $f(x) = x^5$

d) $f(x) = 8x^7$

e) $f(x) = 5x^0$

f) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3$

g) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

h) $f(x) = 7x^4 - 3x + 8$

i) $f(x) = x^2 + 5x - 6$

j) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 4$

k) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + 4$

l) $f(x) = 2x^5 - \dfrac{7}{6}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - x + \sqrt{2}$

2.8.8 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x+1)(x-3)$

b) $f(x) = x(x^2+5)$

c) $f(x) = (7x^2-4x+3)(5-2x)$

d) $f(x) = (2x-1)(2-2x)(1+x)$

e) $f(x) = \dfrac{4-3x}{2x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$

g) $f(x) = \dfrac{5}{2x^2-1}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3-10x^2}{1-x}$

i) $f(x) = \dfrac{8x^2-8x+3}{4x^2-1}$

j) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$

k) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

l) $f(x) = \dfrac{x^3-4}{3x} + x$

2.8.9 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, où a, b, c, d, h, m, t et w sont des constantes :

a) $f(x) = mx + h$

b) $f(x) = (w-1)x^3 + w(x-3)$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

d) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x+t}$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2+2ax+2a}{x^2+ax+a}$

2.8.10 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x+3)^4$

b) $f(x) = (3-x)^5$

c) $f(x) = (x^2+5x+1)^3$

d) $f(x) = (x^3-2x)^7$

e) $f(x) = x^2(5x+2)^3$

f) $f(x) = (2+x)^2(1-x)^3$

g) $f(x) = (2x+5)^3(3x-1)^4$

h) $f(x) = (1-3x)^2(2-x)(x+3)^3$

i) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^2}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{(3x+2)^2}$

k) $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^2}$

l) $f(x) = \dfrac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$

2.8.11 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

c) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

d) $f(x) = \sqrt{8x^2 - 5x + 3}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

f) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

k) $f(x) = (1 + x)\sqrt{1 - x}$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x - 2}{x + 1}}$

2.8.12 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

b) $f(x) = \tan(x) - x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

e) $f(x) = \dfrac{\cos(x) + 2}{\cos(x) + 3}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x) + 1}{1 - \sin(x)}$

g) $f(x) = \sin(2x)$

h) $f(x) = \sin^2(x)$

i) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + 3\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

j) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

k) $f(x) = \tan^5(8x)$

l) $f(x) = \sqrt{1 - \tan(2x)}$

2.8.13 Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et en déduire $f^{(n)}(x)$ pour les fonctions suivantes :

a) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

c) $f(x) = \sin(x)$

d) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

2.8.14 Déterminer les coefficients a, b et c de la fonction $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sachant que $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$ et $f''(2) = 0$.

2.8.15 Former l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a, si :

a) $f(x) = 1 + 2x - x^3$, $a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$, $a = 3$

c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $a = 4$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$, $a = 0$

2.8.16 En quel point la tangente à la courbe $y = x^2$ a-t-elle une pente égale à -3 ?

2.8.17 Calculer l'abscisse des points en lesquels la tangente au graphe de

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$$

est parallèle à la droite passant par $A(-3; 2)$ et $B(1; 14)$.

2.8.18 En quels points la courbe $y = \dfrac{x}{x^2+9}$ a-t-elle une tangente horizontale ?

2.8.19 Déterminer les abscisses en lesquelles les graphes des fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ admettent des tangentes parallèles dans $[0; 2\pi]$.

2.8.20 Déterminer la valeur à attribuer au nombre réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{1 - mx}$ au point où elle coupe Oy soit parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$.

2.8.21 Déterminer les coefficients a, b, c et d sachant que la courbe $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$:

- admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale,
- n'admet pas d'asymptote horizontale,
- passe par le point $P(1; -2)$ et qu'en ce point la pente de la tangente vaut -5.

2.8.22 Pour quels réels a et b le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x + 4$?

2.8.23 Déterminer les équations des tangentes au graphe de f issues du point P :

a) $f(x) = x^2$, $P(5; 9)$

b) $f(x) = x^3$, $P(0; -2)$

2.8.24 Quels sont les points de la courbe $y = x^3 + x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?

2.8.25 Calculer l'angle formé par les courbes en leurs points d'intersection :

a) $y = x^2$ et $y = x^3$,

b) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ et l'axe Ox,

c) $y = \sin(2x)$ et $y = \dfrac{1}{2}\tan(x)$, avec $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2.8.26 Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels les courbes $y = x^3 + ax^2 + bx$ et $y = x^2 - 6x$ sont tangentes en un point d'abscisse 4.

2.8.27 Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que les courbes $y = \sqrt{x} + k$ et $y = \dfrac{x}{2} + 3$ soient tangentes. Calculer le point de tangence.

2.8.28 Quelle valeur faut-il donner au réel a pour que les graphes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{2} - ax^2$ se coupent à angle droit.

2.8.29 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 27}$ sur l'intervalle $[0; 3]$. Montrer qu'il existe un point du graphe de f où la pente de la tangente est égale à 1.

2.8.30 On donne la fonction g par $g(x) = \mid x \mid - 1$. Alors $g(-1) = g(1) = 0$, mais g' ne s'annule pas dans $[-1; 1]$. Est-ce un contre-exemple au théorème de Rolle ?

2.8.31 Montrer que la fonction $f(x) = \sin^6(x) + \cos^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x)$ est constante.

2.8.32 Prouver que, pour tout $x \in [-1; 1]$: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

2.9 Applications de la dérivée

2.9.1 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt[3]{x+4}-2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{x^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin(x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)-\pi/2}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x(2\arctan(x)-\pi)$

2.9.2 Étudier la croissance des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 12$

c) $f(x) = (x+2)^3(x-3)^2$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

g) $f(x) = x^2\sqrt{6-x^2}$

h) $f(x) = \sin(x)(1+\cos(x))$, sur $[0;2\pi]$

2.9.3 Dessiner un graphe possible de $y = f(x)$ connaissant les informations suivantes sur la dérivée :

- $f'(x) < 0$, pour $x \in]-\infty; -3[$,
- $f'(x) = 0$, pour $x = -3$ et $x = 0$,
- $f'(x) > 0$, pour $x \in]-3; 0[\cup]0; +\infty[$.

2.9.4 Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ admet un maximum d'abscisse 1. En déduire lequel des deux nombres ci-dessous est le plus grand,

$$\frac{1,000\ 000\ 000\ 003}{1,000\ 000\ 000\ 003^2+1} \quad \text{ou} \quad \frac{1,000\ 000\ 000\ 004}{1,000\ 000\ 000\ 004^2+1}\ ?$$

2.9.5 La concentration $C(t)$, en milligrammes par litre, d'un certain médicament dans le sang d'un patient est donnée par

$$C(t) = \frac{0,16t}{t^2+4t+4}$$

où t désigne le nombre d'heures suivant la prise du médicament. Après combien de temps la concentration est-elle maximale ?

2.9.6 Déterminer $k \in \mathbb{R}^*$ de telle sorte que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x+k}$ admette un extremum dont l'ordonnée est égale à 8. Préciser ses coordonnées, sa nature (minimum ou maximum) et son type (global ou local).

2.9.7 Étudier la courbure des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

b) $f(x) = x^3 + 3x + 8$

c) $f(x) = (x-1)^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

h) $f(x) = \cos^2(x)$, sur $[0; 2\pi]$

2.9.8 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^3 - 3x^2$ en son point d'inflexion.

2.9.9 Déterminer les paramètres a, b et c tels que $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ admette en $x = 1$ un point d'inflexion en lequel la tangente au graphe soit la droite d'équation $y = 16x - 5$.

2.9.10 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2 \mid x-2 \mid$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

f) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(2-x)^2}$

g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

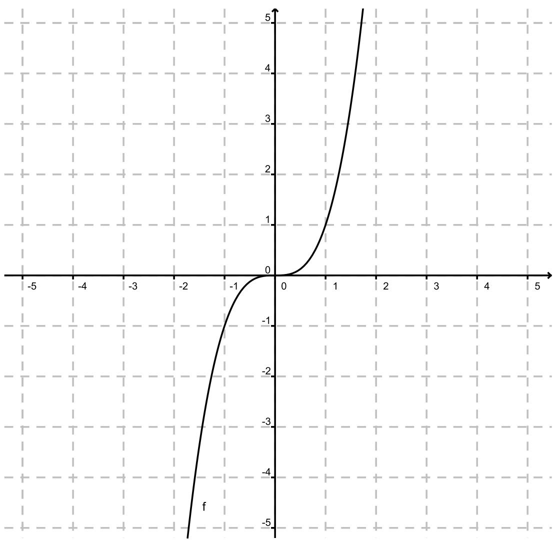
j) $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$

k) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$

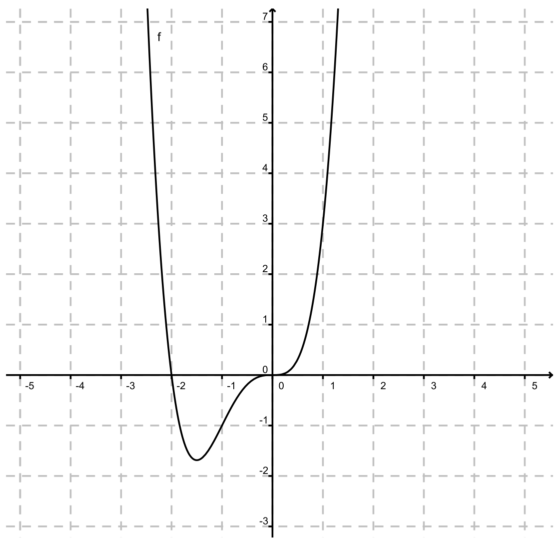
l) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$

2.9.11 Pour chacune des fonctions f représentées graphiquement ci-dessous, déterminer : l'ensemble de définition, la parité, la périodicité, le signe, les équations des asymptotes avec la position, la croissance avec les coordonnées des extremums et la courbure avec les coordonnées des points d'inflexion.

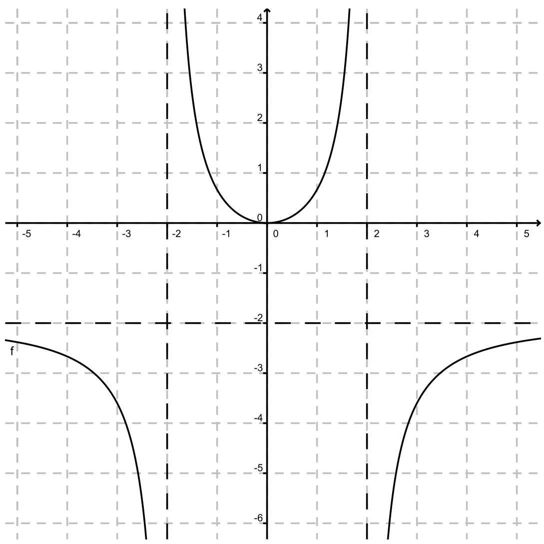
a)



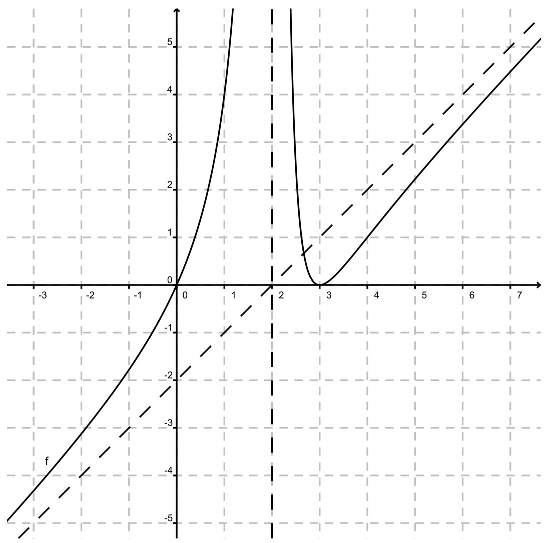
b)



c)



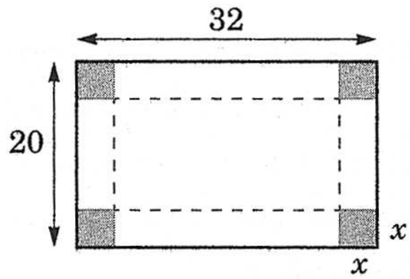
d)



2.9.12 Parmi tous les rectangles dont le périmètre est égal à 4 m, quel est celui qui a la plus grande surface ?

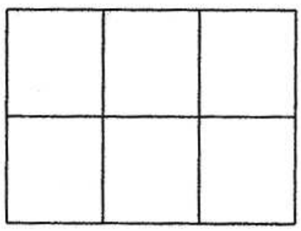
2.9.13 Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune ; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.

2.9.14 On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?



2.9.15 On construit un conteneur de forme cylindrique sans couvercle de volume 324π cm^3. Le matériau utilisé pour le fond coûte 15 centimes par cm^2 et celui utilisé pour la paroi latérale 5 centimes par cm^2. Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles sont les dimensions du conteneur le plus économique ?

2.9.16 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos rectangulaires pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions donner à chacun de ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.

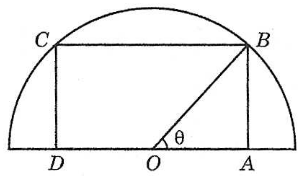


2.9.17 Calculer l'équation de la droite de pente négative qui passe par le point $A(3;2)$ et qui délimite avec les axes de coordonnées un triangle d'aire minimale.

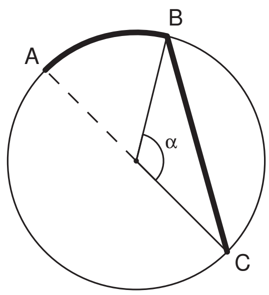
2.9.18 Quel est le point de la courbe $y = \sqrt{2x-1}$ qui est le plus proche du point $P(3;0)$?

2.9.19 On considère la parabole γ d'équation $y = 1 - x^2$ ainsi qu'un point M de γ situé dans le premier quadrant. La tangente à γ au point M coupe l'axe Ox en un point A et l'axe Oy en B. Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

2.9.20 Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de diamètre égal à 2 cm. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale en prenant l'angle θ comme variable.

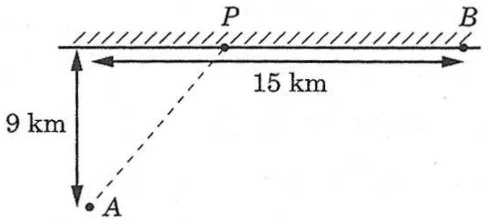


2.9.21 Une canalisation doit relier deux points A et C en bordure d'un lac circulaire de 2 km de rayon. Ces deux points sont situés sur un même diamètre de ce cercle. La canalisation passe sur terre entre les points A et B, sous l'eau entre les points B et C. Sachant que le coût de cette installation est de 3'000.- le mètre sur terre et 5'000.- le mètre sous l'eau, déterminer la valeur en degrés de l'angle $\alpha \in [0°; 180°]$ pour laquelle le coût de cette installation est minimal.

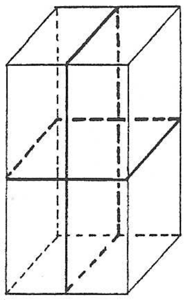


2.9.22 A midi, le bateau B est situé à 45 milles au nord du bateau C. Le bateau B se dirige vers le sud à la vitesse de 9 noeuds et le bateau C se dirige vers l'ouest à la vitesse de 12 noeuds. A quelle heure les bateaux seront ils à une distance minimale ? (Rappel : un noeud = un mille par heure).

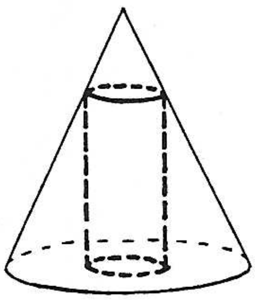
2.9.23 Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



2.9.24 On se propose d'envoyer un colis de volume égal à 12 dm^3 dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle de base carrée. Son emballage est maintenu à l'aide d'une ficelle comme le montre la figure. Trouver les dimensions du colis permettant d'utiliser le moins de ficelle possible.



2.9.25 Calculer les dimensions du cylindre de plus grand volume qu'il est possible de cacher sous un cône circulaire droit de rayon 4 cm et de hauteur 12 cm.



2.10 Fonctions trigonométriques réciproques

2.10.1 Calculer la valeur exacte de l'expression, quand celle-ci existe.

a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

d) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

g) $\arcsin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

h) $\arccos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

i) $\arctan(1)$

j) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{3}{10}\right)\right]$

k) $\cos\left[\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

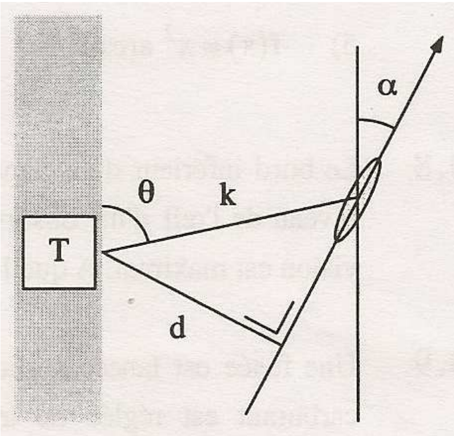
l) $\tan\left[\arctan(14)\right]$

m) $\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

n) $\arccos\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$
o) $\arctan\left[\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$
p) $\arcsin\left[\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$
q) $\arccos\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$
r) $\arctan\left[\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$
s) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
t) $\cos\left[\arctan(1)\right]$
u) $\tan\left[\arcsin(-1)\right]$

2.10.2 Le bord inférieur d'un panneau publicitaire de 10 m de haut est situé 8 mètres au-dessus du niveau de l'oeil d'un observateur. On obtient le meilleur point de vue lorsque l'angle de vision est maximal. A quelle distance du tableau l'observateur doit-il se placer ?

2.10.3 Un voilier en course suit une trajectoire rectiligne. Une station d'observation T est située à d km de la la trajectoire. La station enregistre sa distance k et sa direction θ. L'angle α détermine la direction du voilier par rapport au nord.



a) Exprimer α fonction de d , k et θ.
b) Evaluer l'angle α si $d = 5$ km, $k = 21$ km et θ=53.4 $^\circ$.

2.10.4 Un critique d'art examine un tableau de 3 m de haut suspendu à 1.1 m du sol. Le niveau de ses yeux est à 1.6 m

a) Exprimer l'angle de vue θ en fonction de la distance x à laquelle se trouve le critique d'art.
b) A quelle distance du tableau doit-il se tenir pour que son angle de vue soit égal à 45° ?

2.10.5 Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \arcsin(4x)$
b) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{3}\right)$
c) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
d) $f(x) = \arccos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
e) $f(x) = x^2 \arcsin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$
f) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)$
g) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$
h) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin(x)}$
i) $f(x) = (1 + \arccos(3x))^3$
j) $f(x) = \ln(\arctan(x^2))$

2.10.6 Une fusée est lancée verticalement. Sa vitesse initiale est nulle et la combustion de son carburant est réglée de telle sorte qu'elle lui imprime une accélération constante de 15 m/s^2 pendant les 5 premières secondes. Un observateur, situé à 120 m de la rampe de lancement, suit ce départ.

a) Exprimer l'angle d'élévation $\theta(t)$ de la fusée en fonction du temps t, ainsi que la vitesse angulaire et l'accélération angulaire.

b) L'observateur a l'impression que la fusée monte plus vite quand la vitesse angulaire est maximale (ce n'est qu'une impression d'optique puisque la vitesse s'accroît de façon constante). A quelle hauteur se trouve la fusée à ce moment ?

2.10.7 Un avion vole à 8'000 m d'altitude à une vitesse constante de 720 km/h en s'éloignant d'un observateur au sol.
Calculer la vitesse de variation de l'angle d'élévation au moment où l'avion est à la verticale d'un point situé à 3 km de l'observateur.

2.10.8 En quels points du graphique de la courbe $y = \arcsin(3\,x)$ la tangente est-elle parallèle à la droite passant par les points $A(2\,;\,-3)$ et $B(4\,;\,7)$?

2.11 Solutions des exercices

Propriétés des nombres réels

2.1.1

	minimum	maximum	ens. des minorants	ens. des majorants	infimum	supremum
a)	0	1	$\mathbb{R}_-$	$[1;+\infty[$	0	1
b)	-	-	$\mathbb{R}_-$	$[1;+\infty[$	0	1
c)	2	7	$]-\infty;2]$	$[7;+\infty[$	2	7
d)	-	1	$\mathbb{R}_-$	$[1;+\infty[$	0	1
e)	0	0	$\mathbb{R}_-$	$\mathbb{R}_+$	0	0
f)	0	3	$\mathbb{R}_-$	$[3;+\infty[$	0	3
g)	-	-	-	$\mathbb{R}_+$	-	0
h)	0	16	$\mathbb{R}_-$	$[16;+\infty[$	0	16
i)	-	1/2	$\mathbb{R}_-$	$[1/2;+\infty[$	0	1/2
j)	-	-	-	-	-	-
k)	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$]-\infty;-\sqrt{3}/2]$	$[\sqrt{3}/2;+\infty[$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
l)	-	0	-	$\mathbb{R}_+$	-	0

2.1.2 -

2.1.3 a) - ; b) S possède qu'un seul élément.

2.1.4 $a-|a-|a||=\begin{cases} a & \text{, si } a \geq 0 \\ 3a & \text{, si } a<0 \end{cases}$

2.1.5 -

Généralités sur les fonctions

2.2.1 a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\mathbb{R}$.

2.2.2 a) $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; b) $\mathbb{R}\backslash\{-4;4\}$; c) $\mathbb{R}^*\backslash\{-1\}$; d) $\mathbb{R}^*$; e) $\mathbb{R}\backslash\{-1;5\}$; f) $\mathbb{R}\backslash\{-1;2;1\}$.

2.2.3 a) $\mathbb{R}$; b) $[5;+\infty[$; c) $]-\infty;1]\cup[5;+\infty[$; d) $]-\infty;3]\backslash\{1\}$; e) $]-\infty;-1]\cup]4;+\infty[$; f) $]-1;1[$.

2.2.4 $ED(g)=\,]-\infty\,;\,-1]\cup[1\,;\,5]\cup[7\,;\,+\infty[$

2.2.5 a) $\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}_+^*\backslash\{10\}$; d) $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$; e) $]-2;3[$; f) $\mathbb{R}$.

2.2.6 a) $(f+g)(x)=x^2+3$, $D_{f+g}=\mathbb{R}$; $(f-g)(x)=-x^2+3$, $D_{f-g}=\mathbb{R}$; $(f\cdot g)(x)=3x^2$, $D_{f\cdot g}=\mathbb{R}$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{3}{x^2}$, $D_{f/g}=\mathbb{R}^*$; b) $(f+g)(x)=\dfrac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)}$, $D_{f+g}=\mathbb{R}\backslash\{-5;4\}$; $(f-g)(x)=\dfrac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)}$, $D_{f-g}=\mathbb{R}\backslash\{-5;4\}$;

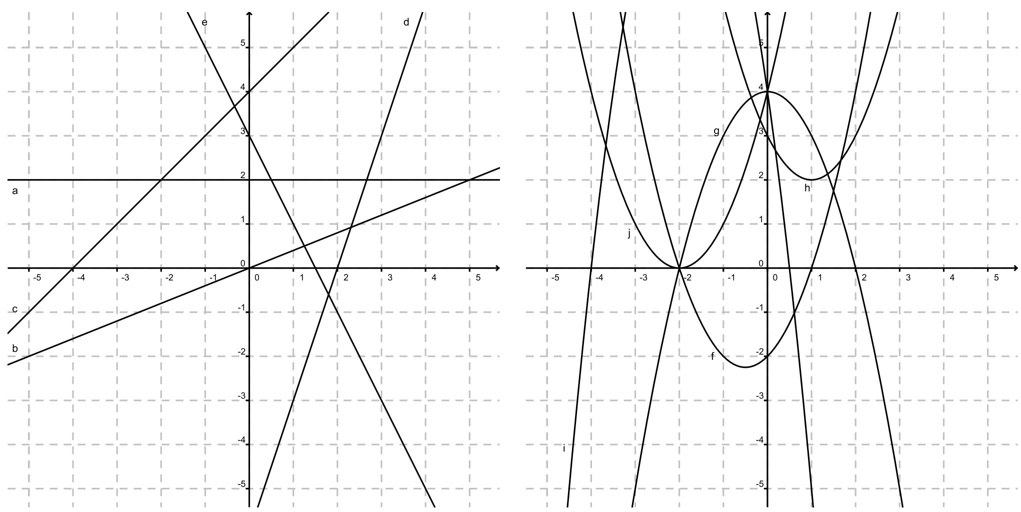
$(f \cdot g)(x) = \dfrac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$, $D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \backslash \{-5; 4\}$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x+10}{x-4}$, $D_{f/g} = \mathbb{R}^* \backslash \{-5; 4\}$; c) $(f+g)(x) = 3\sqrt{x}$, $D_{f+g} = \mathbb{R}_+$; $(f-g)(x) = -\sqrt{x}$, $D_{f-g} = \mathbb{R}_+$; $(f \cdot g)(x) = 2x$, $D_{f \cdot g} = \mathbb{R}_+$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{2}$, $D_{f/g} = \mathbb{R}_+^*$; d) $(f+g)(x) = \ln(x - x^2)$, $D_{f+g} =]0; 1[$; $(f-g)(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $D_{f-g} =]0; 1[$; $(f \cdot g)(x) = \ln(x)\ln(1-x)$, $D_{f \cdot g} =]0; 1[$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(1-x)}$, $D_{f/g} =]0; 1[$.

2.2.7 a) $(f \circ g)(x) = 4x - 2$; b) $(h \circ f)(x) = 4x^2$; c) $(g \circ h \circ f)(x) = 8x^2 - 1$.

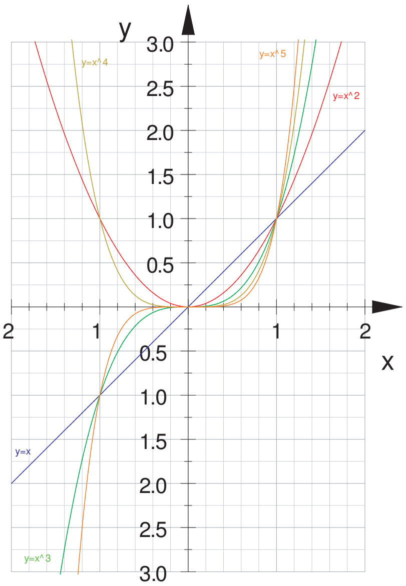
2.2.8 a) $(f \circ g)(x) = x + 2 - 3\sqrt{x+2}$, $D_{f \circ g} = [-2; +\infty[$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $D_{g \circ f} =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$; b) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R}^* \backslash \{-3\}$, $(g \circ f)(x) = \dfrac{6x+4}{x}$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}^* \backslash \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

2.2.9 a) $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 3x + 1$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $h(x) = x^2 + x + 3$; c) $g(x) = x^7$, $h(x) = x + 2$; d) $g(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$, $h(x) = \sqrt{x}$; e) $g(x) = \log(x)$, $h(x) = x^2 + 4$; f) $g(x) = 3^x$, $h(x) = 2x - 5$.

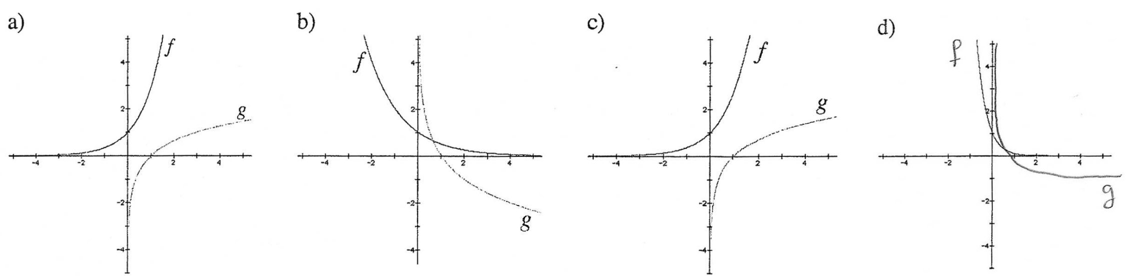
2.2.10



2.2.11

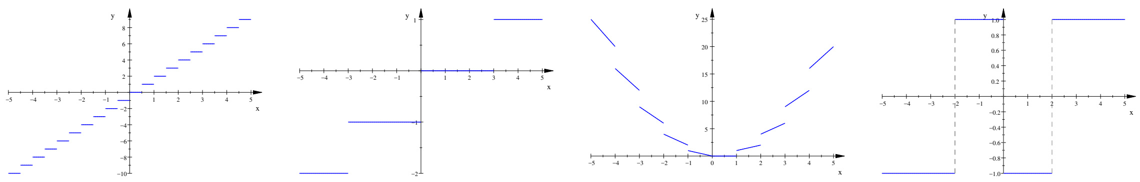


2.2.12

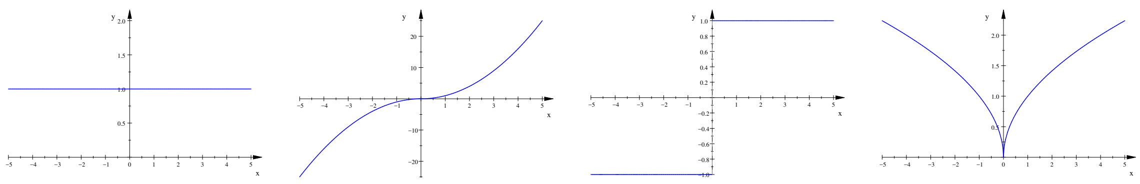


2.2.13

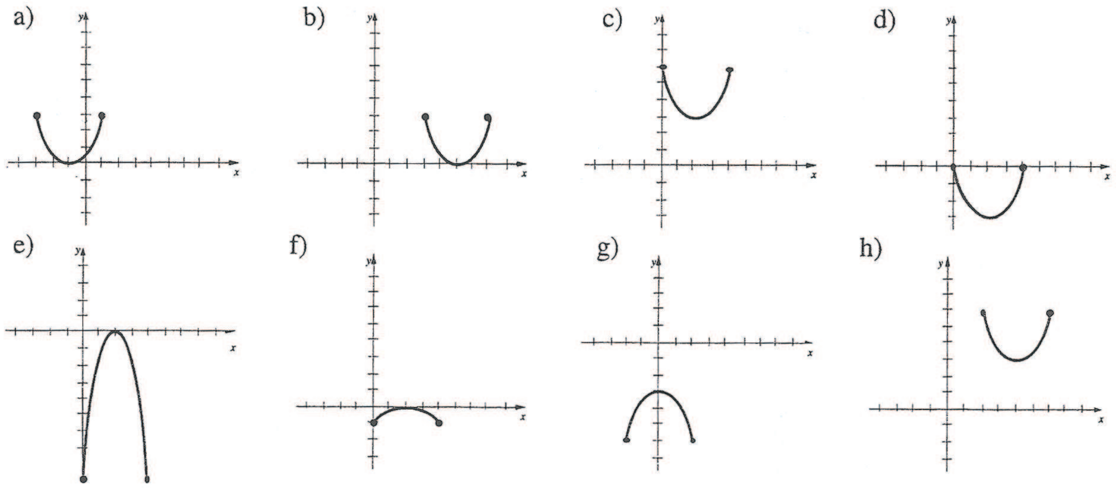
a) b) c) d)



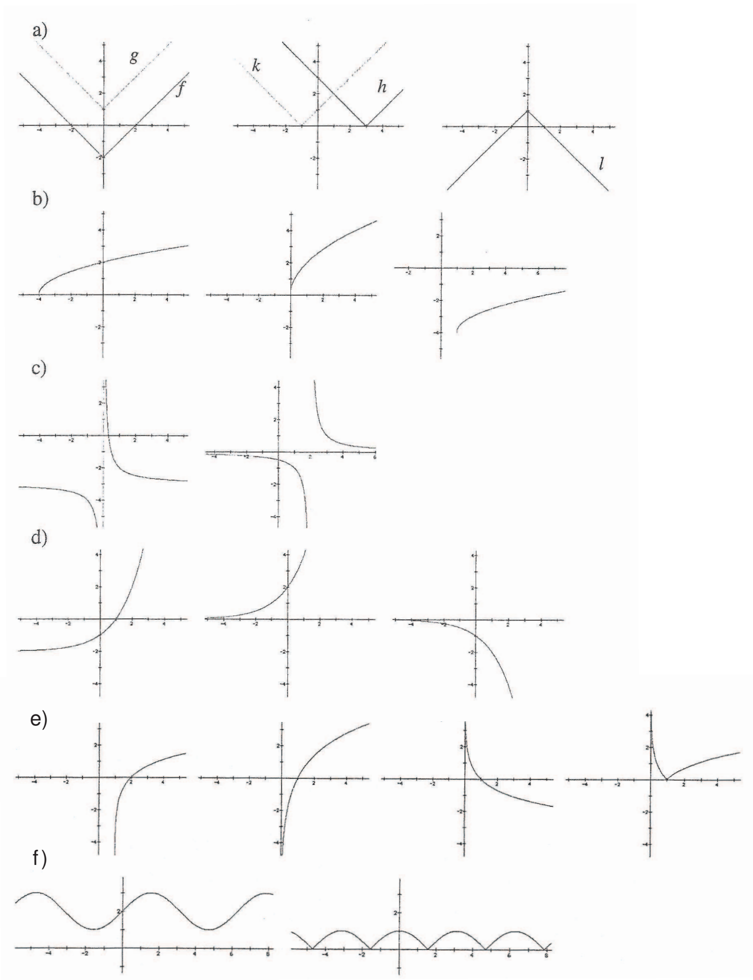
e) f) g) h)



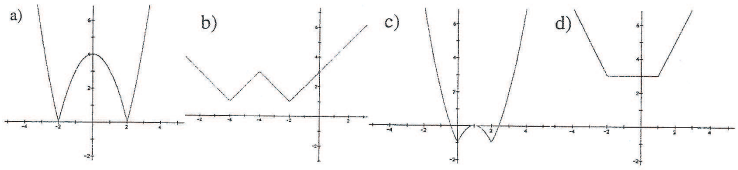
2.2.14



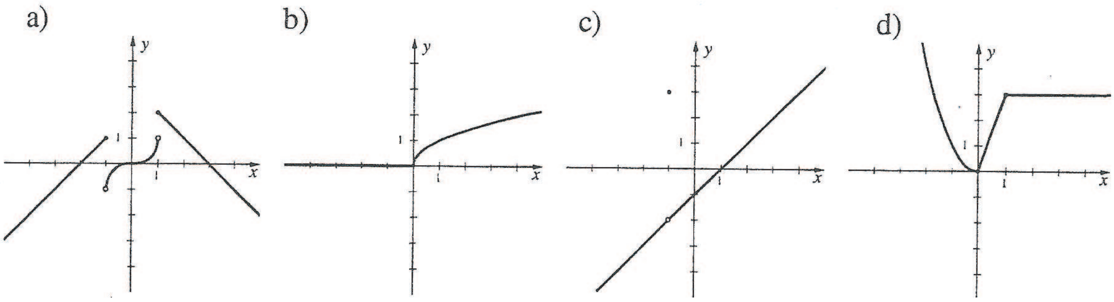
2.2.15



2.2.16



2.2.17



2.2.18 $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

2.2.19 a) paire ; b) impaire ; c) paire ; d) pas de parité ; e) impaire ; f) impaire ; g) paire ; h) pas de parité ; i) pas de parité ; j) paire ; k) paire ; l) impaire ; m) pas de parité ; n) paire.

2.2.20 a) $f+g$ paire, $f \cdot g$ paire, $f \circ g$ paire, $g \circ f$ paire ; b) $f+g$ impaire, $f \cdot g$ paire, $f \circ g$ impaire, $g \circ f$ impaire ; c) $f+g$ pas de parité, $f \cdot g$ impaire, $f \circ g$ paire, $g \circ f$ paire.

2.2.21 a) $2\,x\,h + h^2 + 2\,h$

b) $\dfrac{2\,h}{(x+h+3)(x+3)}$

c) $\sqrt{2\,x+2\,h-7} - \sqrt{2\,x-7}$

2.2.22 —

Fonctions injectives, surjectives et bijectives

2.3.1

a) f_1 : injective	f) f_6 : injective	k) f_{11} : surjective
b) f_2 : quelconque	g) f_7 : injective	l) f_{12} : surjective
c) f_3 : bijective	h) f_8 : quelconque	m) f_{13} : bijective
d) f_4 : injective	i) f_9 : bijective	n) f_{14} : injective
e) f_5 : bijective	j) f_{10} : bijective	o) f_{15} : bijective

2.3.2 a) $\begin{array}{rccc} f_1 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$ b) $\begin{array}{rccc} {}^r f_2 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{3} \end{array}$

c) $$\begin{array}{rcccc} {}^r f_3 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x-3}{2} \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcccc} {}^r f_4 & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

e) $$\begin{array}{rcccc} {}^r f_5 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$$

f) $$\begin{array}{rcccc} {}^r f_6 & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & x+3 \end{array}$$

g) $$\begin{array}{rcccc} {}^r f_7 & : & \mathbb{R}-\{2\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

h) $$\begin{array}{rcccc} {}^r f_8 & : & \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$$

2.3.3 Par exemple :

a) $f \,:\, \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \;\; ; \; {}^r f(x) = \sqrt{x}$

b) $f \,:\, \left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[\to \left[-\frac{25}{4}\,;\,+\infty\right[\;\; ; \; {}^r f(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \dfrac{25}{4}}$

c) $f \,:\, [2\,;\,+\infty[\to]-\infty\,;\,4] \;\; ; \; {}^r f(x) = 2 + \sqrt{4-x}$

d) $f \,:\, [0\,;\,\pi] \to [-1\,;\,1] \;\; ; \; {}^r f(x) = \arccos(x)$

e) $f \,:\, \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \;\; ; \; {}^r f(x) = \arctan(x)$

f) $f \,:\, \left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \to [-1\,;\,1] \;\; ; \; {}^r f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{2}$

2.3.4 a) f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$.
f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1+x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.

b) $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1,1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1,1]$.

c) Soit $y \in [-1,1]$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Donc pour $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc g est une bijection.

2.3.5
- f est injective :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ où } x, y \in [\,1\,;\,+\infty\,[\text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [\,1\,;\,+\infty\,[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Suites de nombres réels

2.4.1 a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$; b) 0, 2, 0, 2 ; c) 1, 0, -3, 0 ; d) 1, $\sqrt{10}-2$, $3\sqrt{2}-3$, $2\sqrt{7}-4$.

2.4.2 a) 1, 3, 7, 15 ; b) 3, $\frac{1}{3}, -\frac{5}{9}, -\frac{23}{27}$; c) 2, $\frac{5}{4}, \frac{41}{40}, \frac{3'281}{3'280}$; d) 1, 1, 1, 1.

2.4.3 $a_n = 1+3n$; $a_n = 2n^2$; $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; $a_n = \frac{n-2}{n+1}$; $a_n = (-3)^n$; $a_n = \sqrt[n]{n}$.

2.4.4 a) bornée par 1 et 2, strictement croissante ; b) majorée par -1, strictement décroissante ;
c) minorée par -6, strictement croissante ; d) bornée par 0 et 3/19, strictement décroissante ; e) bornée par 1 et 9 ; f) minorée par 1, strictement croissante.

2.4.5 a) $N = 33$; – b) $N = 4$; –

2.4.6 a) 2 ; b) -2 ; c) 0 ; d) - ; e) 16 ; f) 7.

2.4.7 a) 0 ; b) 0 ; c) 0 ; d) 0 ; e) 0 ; f) x.

2.4.8 a) - ; b) 2.

2.4.9 a) - ; b) 0.

2.4.10 a) – b) – c) 4.

2.4.11 a) ∞ ; b) -1 ; c) 2/3 ; d) 1/2 ; e) 2 ; f) 1/2.

2.4.12 a) suite géométrie de premier terme -1 et de raison 1/4 ; b) $a_n = -(1/4)^{n-1}+4$, avec $n \geq 1$, convergeant vers 4.

2.4.13 2.

2.4.14 $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$.

2.4.15 Longueur de 2π et enroulement autour de 4/7.

Limites de fonctions

2.5.1 a) b, b, b ; b) b, b, b ; c) b, $f(a)$, - ; d) b, c, -.

2.5.2 a) 2 ; b) 14 ; c) 0 ; d) -5 ; e) 2 ; f) $\frac{4}{3}$; g) -1 ; h) $\frac{1}{2}$.

2.5.3 a) $\frac{1}{2}$; b) 0 ; c) $\frac{1}{2}$; d) 2 ; e) $\frac{1}{4}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $-\frac{1}{12}$; h) 0.

2.5.4 a) 8 ; b) $\frac{1}{10}$; c) $-\frac{1}{8}$; d) 2 ; e) 3 ; f) $\frac{1}{2}$; g) $-2\sqrt{3}$; h) $\frac{5}{3}$.

2.5.5 a) -1, 1, - ; b) 1, 1, 1 ; c) 2, -2, - ; d) -1, 1, -.

2.5.6 a) 0 ; b) 0.

2.5.7 0.

2.5.8 a) 2 ; b) 3/2 ; c) 1/20 ; d) 7/3 ; e) 1 ; f) 1 ; g) 1/2 ; h) -1.

2.5.9 -

2.5.10 a) $f(x) = \dfrac{3x-6}{x-2}$; b) $f(x) = \dfrac{7x+7}{x+1}$.

2.5.11 $\dfrac{1}{2}$.

2.5.12 $-\dfrac{1}{3}$.

2.5.13 A : 3), 6), 9) ; B : 5) ; C : 1), 4), 8) ; D : - (la courbe n'est pas le graphe d'une fonction).

2.5.14 a) $+\infty$; b) ∞ ; c) $-\infty$; d) $-\infty$; e) -1 ; f) 2 ; g) $+\infty$; h) $\dfrac{1}{4}$.

2.5.15 a) -2, $+\infty$, - ; b) 0, -, -.

2.5.16 a) $-\dfrac{2}{3}$; b) $+\infty$; c) 1 ; d) $-\dfrac{3}{10}$; e) 2 ; f) 3 ; g) $-\infty$; h) 0.

2.5.17 a) $+\infty$, $1/2$; b) -2, 2 ; c) -1, 1 ; d) 4, 0 ; e) $-\infty$, $+\infty$; f) 2, 2 ; g) 1, 1 ; h) 0, 0.

2.5.18 -

Continuité

2.6.1 Trou : $(-1;1)$, AV : $x = 1$, saut : $x = 3$.

2.6.2 a) AV : $x = -2$; b) Trou $(-1;-1)$, AV : $x = 1$; c) - ; d) AV : $x = 0$ et $x = 5$; e) Saut : $x = -1$; f) Trou : $(0;1)$.

2.6.3 a) $C_f = \mathbb{R} \setminus \{-1/2; 1/3\}$; b) $C_f = [-5;5]$; c) $C_f = [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$; d) $C_f = \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$; e) $C_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; f) $C_f = \mathbb{R}^*$.

2.6.4 -

2.6.5 a)

x		$\frac{4}{5}$		1		4	
$f(x)$	$///$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

; b)

x		-3		0		3	
$f(x)$	$///$	0	$-$	0	$+$	0	$///$

;

c)

x		-1		0	
$f(x)$	$+$	0	$+$	$\|$	$+$

d)

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

.

Asymptotes

2.7.1 a)

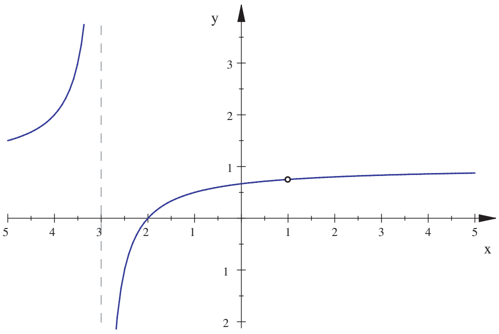
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3;1\}$

AV : $x = -3$, Trou $\left(1;\dfrac{3}{4}\right)$,

AH : $y = 1$, pas d'AO

$\delta(x) = \dfrac{-x+1}{x^2+2x-3}$

x		-3		1	
$\delta(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$



b)

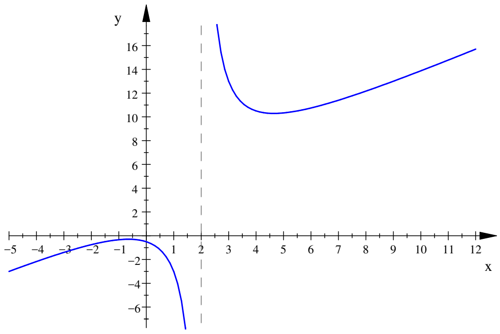
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

AV : $x = 2$,

pas d'AH, AO : $y = x + 3$

$\delta(x) = \dfrac{7}{x-2}$

x		2	
$\delta(x)$	$-$	$\Vert$	$+$



c)

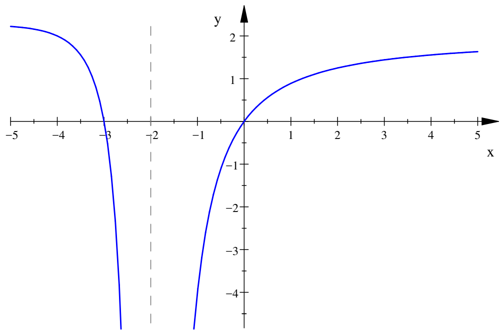
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

AV : $x = -2$,

AH : $y = 2$, pas d'AO

$\delta(x) = \dfrac{-2x-8}{x^2+4x+4}$

x		-4		-2	
$\delta(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$



d)

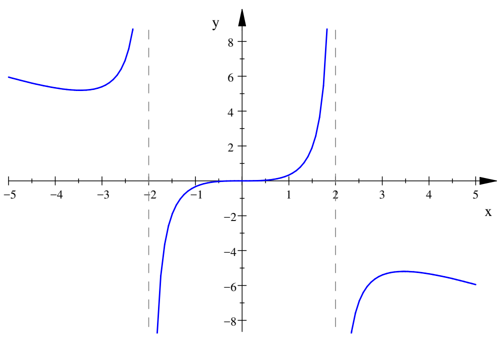
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$

AV : $x = -2$, $x = 2$,

pas d'AH, AO : $y = -x$

$\delta(x) = \dfrac{4x}{-x^2+4}$

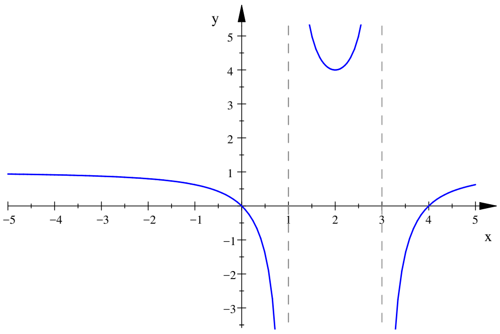
x		-2		0		2	
$\delta(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$



e)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1;3\}$
AV : $x = 1$, $x = 3$,
AH : $y = 1$, pas d'AO
$\delta(x) = \dfrac{-3}{x^2-4x+3}$

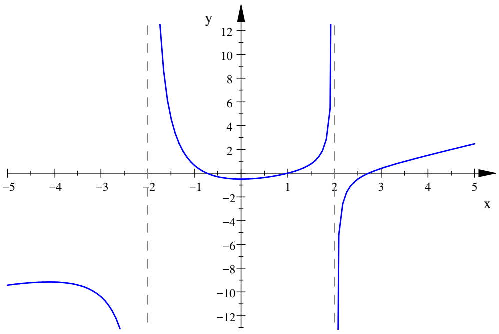
x		1		3	
$\delta(x)$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$



f)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$
AV : $x = -2$, $x = 2$,
pas d'AH, AO : $y = x - 3$
$\delta(x) = \dfrac{4x-10}{x^2-4}$

x		-2		2		$\frac{5}{2}$	
$\delta(x)$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$



2.7.2 a) $D_f =]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$, AV : $x = -1$, pas d'AH, AO : $y = x - \dfrac{1}{2}$;
b) $D_f =]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$, pas d'AV, AH : $y = 0$ vers $-\infty$, AO : $y = 2x$ vers $+\infty$;
c) $D_f =]3;+\infty[$, AV : $x = 3$, AH : $y = 0$ vers $+\infty$;
d) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$, AV : $x = 3$, AH : $y = 0$;
e) $D_f =]-\infty;-\frac{3}{2}]\cup[0;+\infty[$, pas d'AV, AO : $y = 4x - \frac{3}{2}$ vers $-\infty$, AH : $y = -\frac{9}{2}$ vers $+\infty$;
f) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, AV : $x = 0$, AH : $y = 3$ vers $-\infty$, AH : $y = 0$ vers $+\infty$.

2.7.3 $f_1 \longleftrightarrow 3$; $f_2 \longleftrightarrow 9$; $f_3 \longleftrightarrow 7$; $f_4 \longleftrightarrow 10$; $f_5 \longleftrightarrow 4$; $f_6 \longleftrightarrow 12$; $f_7 \longleftrightarrow 1$; $f_8 \longleftrightarrow 6$; $f_9 \longleftrightarrow 5$; $f_{10} \longleftrightarrow 8$; $f_{11} \longleftrightarrow 11$; $f_{12} \longleftrightarrow 2$.

2.7.4 a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x+4)(x-2)}$; b) $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{1}{x-1}$.

2.7.5 $n = 0$: AV : $x = -3$, $x = 3$, AH : $y = 0$, pas d'AO ;
$n = 1$: AV : $x = 3$, AH : $y = 0$, pas d'AO ;
$n = 2$: AV : $x = -3$, $x = 3$, AH : $y = 1$, pas d'AO ;
$n = 3$: AV : $x = -3$, $x = 3$, pas d'AH, AO : $y = x$,
$n > 3$: AV : $x = -3$, $x = 3$, pas d'AH, pas d'AO.

2.7.6 $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$.

2.7.7 $a = 1$, $b = -1$, $c = -3$.

2.7.8 $a = -2$, $b = -5$, $c = 8$, $d = 3$.

Dérivées

2.8.1 a) $f'(x) = 0$; b) $f'(x) = 2$; c) $f'(x) = 2x$; d) $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x+1)^2}$;
e) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2}$; f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$.

2.8.2 a) $f'(x) = -2x+1$; b) $f'(-1) = 3$, $f'(0) = 1$, $f'(2) = -3$.

2.8.3 a) non ; b) oui ; c) non ; d) non.

2.8.4 -

2.8.5 a) - ; b) non.

2.8.6 $f'(a) = -\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, f est non dérivable en ± 1.

2.8.7 a) $f'(x) = 0$; b) $f'(x) = 3$; c) $f'(x) = 5x^4$; d) $f'(x) = 56x^6$; e) $f'(x) = 0$; f) $f'(x) = x^2$; g) $f'(x) = 3x^2+2x+1$; h) $f'(x) = 28x^3-3$; i) $f'(x) = 2x+5$; j) $f'(x) = 3x^2+10x-2$; k) $f'(x) = 2x^2-5x+2$; l) $f'(x) = 10x^4 - \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x - 1$.

2.8.8 a) $f'(x) = 2x-2$; b) $f'(x) = 3x^2+5$; c) $f'(x) = -42x^2+86x-26$;
d) $f'(x) = -12x^2+4x+4$; e) $f'(x) = -\dfrac{5}{(2x-1)^2}$; f) $f'(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$;
g) $f'(x) = -\dfrac{20x}{(2x^2-1)^2}$; h) $f'(x) = \dfrac{-2x^3+13x^2-20x}{(1-x)^2}$; i) $f'(x) = \dfrac{32x^2-40x+8}{(4x^2-1)^2}$;
j) $f'(x) = \dfrac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$; k) $f'(x) = \dfrac{4-x}{x^3}$; l) $f'(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+4}{3x^2}$.

2.8.9 a) $f'(x) = m$; b) $f'(x) = 3(w-1)x^2+w$; c) $f'(x) = 2ax+b$; d) $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;
e) $f'(x) = \dfrac{t}{(x+t)^2}$; f) $f'(x) = \dfrac{ax^2+2ax}{(x^2+ax+a)^2}$.

2.8.10 a) $f'(x) = 8(2x+3)^3$; b) $f'(x) = -5(3-x)^4$; c) $f'(x) = 3(x^2+5x+1)^2(2x+5)$;
d) $f'(x) = 7(x^3-2x)^6(3x^2-2)$; e) $f'(x) = x(5x+2)^2(25x+4)$;
f) $f'(x) = -(2+x)(1-x)^2(4+5x)$; g) $f'(x) = 6(2x+5)^2(3x-1)^3(7x+9)$;
h) $f'(x) = (1-3x)(x+3)^2(18x^2-7x-33)$; i) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2+3)^3}$; j) $f'(x) = \dfrac{2-3x}{(3x+2)^3}$;
k) $f'(x) = -\dfrac{(1-x)^2(x+5)}{(1+x)^3}$; l) $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x^2-3x+6)}{(x-2)^3}$.

2.8.11 a) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; b) $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; c) $f'(x) = \dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$;
d) $f'(x) = \dfrac{16x-5}{2\sqrt{8x^2-5x+3}}$; e) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$; f) $f'(x) = 3\sqrt{4x^2-2x}(4x-1)$;
g) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$; h) $f'(x) = \dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$; i) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$;
j) $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$; k) $f'(x) = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{1-x}}$; l) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{3x-2}\sqrt{(x+1)^3}}$.

2.8.12 a) $f'(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$; b) $f'(x) = \tan^2(x)$; c) $f'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$;
d) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$; e) $f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{(\cos(x)+3)^2}$; f) $f'(x) = \dfrac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$;
g) $f'(x) = 2\cos(2x)$; h) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$; i) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - 12\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;
j) $f'(x) = \dfrac{3\cos(3x)\cos(5x)+5\sin(3x)\sin(5x)}{\cos^2(5x)}$; k) $f'(x) = 40\tan^4(8x)(1+\tan^2(8x))$;
l) $f'(x) = -\dfrac{1+\tan^2(2x)}{\sqrt{1-\tan(2x)}}$.

2.8.13 a) $f^{(n)}(x) = n!\ a_n$; b) $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{, si } n \equiv 0 \mod 4 \\ \cos(x) & \text{, si } n \equiv 1 \mod 4 \\ -\sin(x) & \text{, si } n \equiv 2 \mod 4 \\ -\cos(x) & \text{, si } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

c) $$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n(x+1)^{n-1/2}}$$

2.8.14 $a = 6$, $b = -12$, $c = 7$.

2.8.15 a) $y = -x+3$; b) $y = -\dfrac{1}{3}x+3$; c) $y = \dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$; d) $y = x$.

2.8.16 $P\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$.

2.8.17 $-\dfrac{4}{3}$, 2.

2.8.18 $P_1\left(-3; -\dfrac{1}{6}\right)$, $P_2\left(3; \dfrac{1}{6}\right)$.

2.8.19 $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$.

2.8.20 $m = -9/2$.

2.8.21 $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$.

2.8.22 $a = -2$, $b = -6$.

2.8.23 a) $y = 2x-1$, $y = 18x-81$; b) $y = 3x-2$.

2.8.24 $(0;0)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{8}\right)$.

2.8.25 a) 0° et 8.13° ; b) 38.66° et 38.66° ; c) 36.87° et 71.57°.

2.8.26 $a = -7$, $b = 10$.

2.8.27 $k = \dfrac{5}{2}$, $\left(1; \dfrac{7}{2}\right)$.

2.8.28 $a = 1$.

2.8.29 -

2.8.30 Non, car g n'est pas dérivable en $0 \in]-1; 1[$.

2.8.31 -

2.8.32 -

Applications de la dérivée

2.9.1 a) $-\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{4}{9}$; c) 12 ; d) $-\dfrac{2}{3}$; e) $-\dfrac{9}{2}$; f) 6 ; g) -1 ; h) -2.

2.9.2 a)

x		-1		1	
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

, Max $(-1; 2)$, Min $(1; -2)$;

b)

x		-1		0		1	
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

, Max $(-1; 13)$, Min $(0; 12)$, Max $(1; 13)$;

c)

x		-2		1		3	
$f(x)$	$\nearrow$	$Plat$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

, Plat $(-2; 0)$, Max $(1; 108)$, Min $(3; 0)$;

d)

x		-5	
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

;

e)

x		-5		-2		1	
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

, Max $(-5; -12)$, Min $(1; 0)$;

f)

x		-1		1	
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

, Min $\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$, Max $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$;

g)

x		$-\sqrt{6}$		-2		0		2		$\sqrt{6}$	
$f(x)$	$///$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0	$///$

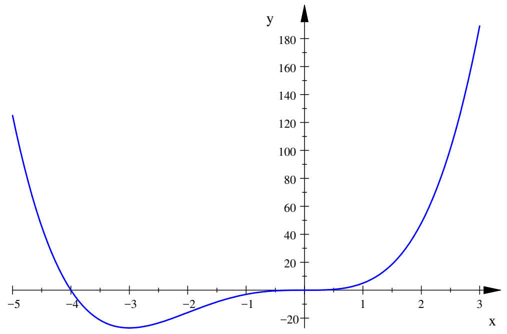
,
Min $(-\sqrt{6}; 0)$, Max $(-2; 4\sqrt{2})$, Min $(0; 0)$, Max $(2; 4\sqrt{2})$, Min $(\sqrt{6}; 0)$;

h)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	$Plat$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

, Max $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, Plat $(\pi; 0)$,
Min $\left(\dfrac{5\pi}{3}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

2.9.3 Par exemple :



2.9.4 $\dfrac{1,000\,000\,000\,003}{1,000\,000\,000\,003^2+1} > \dfrac{1,000\,000\,000\,004}{1,000\,000\,000\,004^2+1}$

2.9.5 Après 2 h.

2.9.6 $k = -2$, minimum local en $(4; 8)$.

2.9.7 a)

x	
$f(x)$	$\cup$

;

b)

x		0	
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$

, PI $(0; 8)$;

c)

x		1	
$f(x)$	$\cup$		$\cup$

;

d)

x		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

, PI $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{3}{4}\right)$, PI $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{3}{4}\right)$;

e)

x		1	
$f(x)$	$\cap$	$\|$	$\cup$

;

f)

x		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	
$f(x)$	$\cup$	$\|$	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$

, PI $(0; -1)$, PI $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; -\dfrac{1}{3}\right)$;

g)

x		-1		1	
$f(x)$	$///$	$\|$	$\cap$	$\|$	$///$

;

h)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$		$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$	

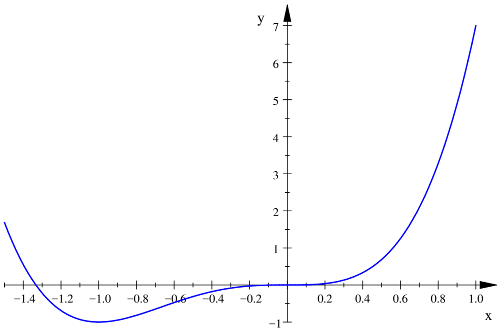
, PI $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$, PI $\left(\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$, PI $\left(\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$, PI $\left(\dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$.

2.9.8 $y = -3x + 1$

2.9.9 $a = -8$, $b = 18$, $c = 0$.

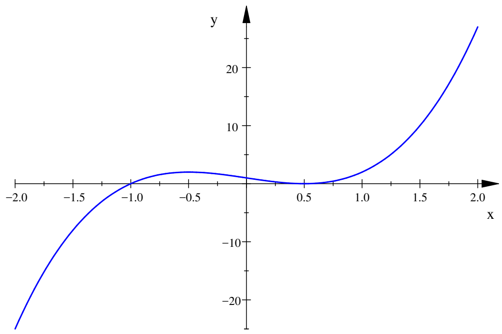
2.9.10 a)

$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x = -\frac{4}{3}$, $x = 0$
Pas d'asymptote
$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$
Min $(-1; -1)$
$f''(x) = 36x^2 + 24x$
PI $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{16}{27}\right)$, PI $(0; 0)$



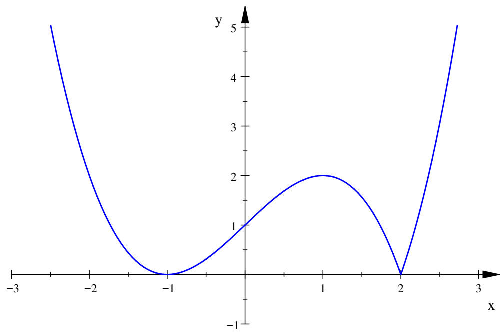
b)

$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$
Pas d'asymptote
$f'(x) = 12x^2 - 3$
Max $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, Min $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$
$f''(x) = 24x$
PI $(0; 1)$



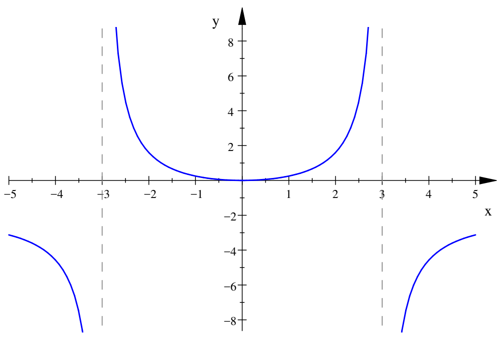
c)

$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéros : $x = -1$, $x = 2$
Pas d'asymptote
$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 1)\text{sgn}(x - 2)$
Min $(-1; 0)$, Max $(1; 2)$, Min $(2; 0)$
$f''(x) = 3 \cdot x \cdot \text{sgn}(x - 2)$
PI $(0; 1)$



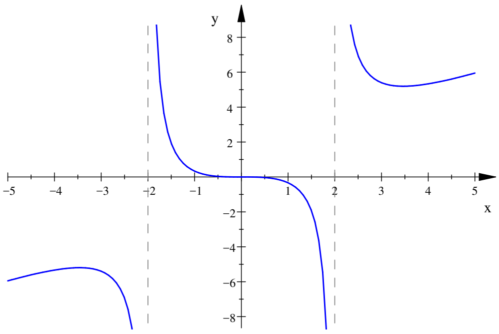
d)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$
f paire
Zéro : $x = 0$
AV : $x = -3$, $x = 3$, AH : $y = -2$
$f'(x) = \frac{36x}{(9 - x^2)^2}$
Min $(0; 0)$
$f''(x) = \frac{108x^2 + 324}{(9 - x^2)^3}$



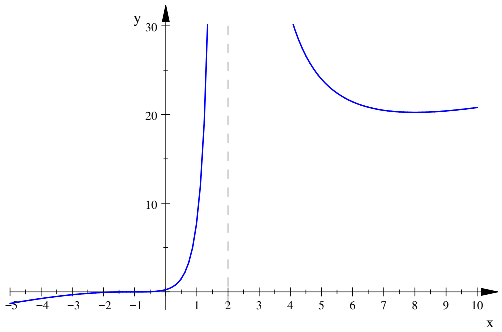
e)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$
f impaire
Zéro : $x = 0$
AV : $x = -2$, $x = 2$, AO : $y = x$
$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$
Max $(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$, Plat $(0;0)$,
Min $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$
$f''(x) = \dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$
PI $(0;0)$



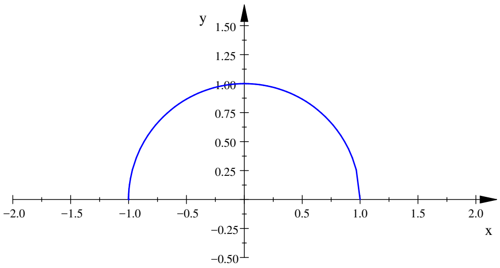
f)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
Pas de parité
Zéro : $x = -1$
AV : $x = 2$, AO : $y = x + 7$
$f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(8-x)}{(2-x)^3}$
Plat $(-1; 0)$, Min $\left(8; \dfrac{81}{4}\right)$
$f''(x) = \dfrac{54(x+1)}{(2-x)^4}$
PI $(-1; 0)$



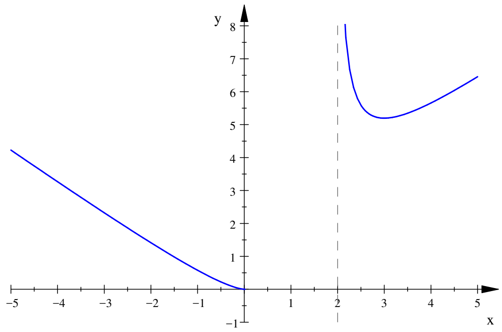
g)

$D_f = [-1; 1]$
f paire
Zéro : $x = \pm 1$
Pas d'asymptote
$f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
Max $(0; 1)$
$f''(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$



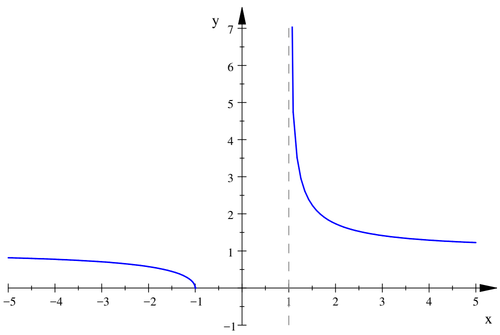
h)

$D_f =]-\infty; 0] \cup]2; +\infty[$
Pas de parité
Zéro : $x = 0$
AV : $x = 2$, AO : $y = \pm(x + 1)$
$f'(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{\sqrt{x^3(x-2)^3}}$
Min $(3; 3\sqrt{3})$
$f''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}$



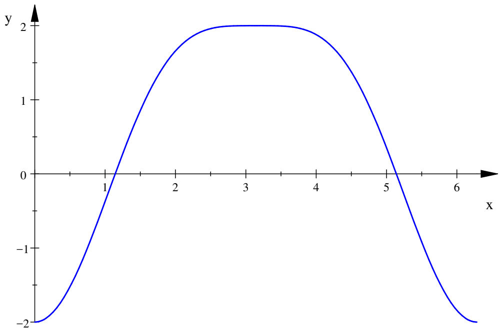
i)

$D_f =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$
Pas de parité
Zéro : $x = -1$
AV : $x = 1$, AH : $y = 1$
$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$
$f''(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^3(x-1)^5}}$



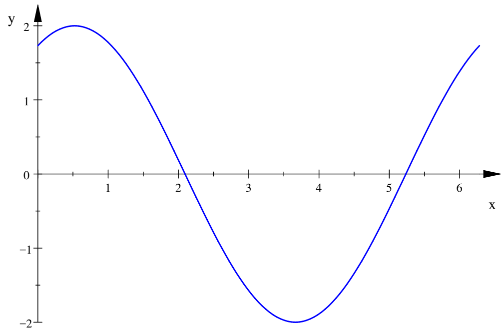
j)

$D_f = \mathbb{R}$
f paire
f périodique de période 2π,
donc étude sur $[0; 2\pi]$
Zéro : $x \cong 1,14$, $x \cong 5,14$
Pas d'asymptote
$f'(x) = 2\sin(x)(\cos(x) + 1)$
Min $(0; -2)$, Max $(\pi; 2)$, Min $(2\pi; -2)$
$f''(x) = 4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2$
PI $(\pi/3; -1/4)$, PI $(5\pi/3; -1/4)$



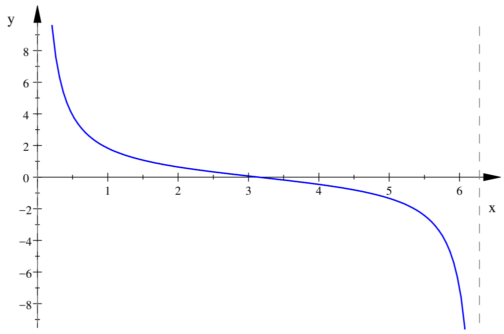
k)

$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
f périodique de période 2π,
donc étude sur $[0; 2\pi]$
Zéro : $x = 2\pi/3$, $x = 5\pi/3$
Pas d'asymptote
$f'(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$
Max $(\pi/6; 2)$, Min $(7\pi/6; -2)$
$f''(x) = -\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)$
PI $(2\pi/3; 0)$, PI $(5\pi/3; 0)$



l)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
f impaire
f périodique de période 2π,
donc étude sur $[0; 2\pi]$
Zéro : $x = \pi$
AV : $x = 0$, $x = 2\pi$
$f'(x) = -\dfrac{1}{1 - \cos(x)}$
$f''(x) = \dfrac{\sin(x)}{(1 - \cos(x))^2}$
PI $(\pi; 0)$



2.9.11 a) $D_f = \mathbb{R}$, f impaire, f non périodique,

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

, pas d'asymptote,

x		0	
$f(x)$	$\nearrow$	$Plat$	$\nearrow$

, Plat $(0; 0)$,

x		0	
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$

, PI $(0; 0)$.

b) $D_f = \mathbb{R}$, pas de parité, f non périodique,

x		-2		0	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

,

pas d'asymptote,

x		$-1,5$		0	
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	$Plat$	$\nearrow$

, Min $(-1,5; -1,8)$, Plat $(0; 0)$,

x		-1		0	
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

, PI $(-1; -1)$, PI $(0; 0)$.

c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, f paire, f non périodique,

x		-2		0		2	
$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$+$	$\parallel$	$-$

,

AV : $x = -2$, $x = 2$, AH : $y = -2$,

x		-2		2	
$f(x)$	*Dessous*	$\parallel$	*Dessus*	$\parallel$	*Dessous*

,

x		-2		0		2	
$f(x)$	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$

Min $(0; 0)$,

x		-2		2	
$f(x)$	$\cap$	$\parallel$	$\cup$	$\parallel$	$\cap$

.

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, pas de parité, f non périodique,

x		0		2		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$+$

,

AV : $x = 2$, AO : $y = x - 2$,

x		2		$2,7$	
$f(x)$	*Dessus*	$\parallel$	*Dessus*	*Coupe*	*Dessous*

,

x		2		3	
$f(x)$	$\nearrow$	$\parallel$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$

Min $(3; 0)$,

x		2		4	
$f(x)$	$\cup$	$\parallel$	$\cup$	*PI*	$\cap$

, PI $(4; 1)$.

2.9.12 Carré de côté 1 m.

2.9.13 Longueur : 32 cm, largeur : 16 cm.

2.9.14 Hauteur : 4 cm.

2.9.15 Rayon : $\sim$ 4,8 cm ; hauteur : $\sim$ 14,3 cm.

2.9.16 Longueur : 18 m, largeur : 16 m.

2.9.17 $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$.

2.9.18 $M(2; \sqrt{3})$.

2.9.19 $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{3}\right)$.

2.9.20 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

2.9.21 $\alpha = 0°$.

2.9.22 13 h 48 min.

2.9.23 A 3 km du point B.

2.9.24 Côté base : 2 dm, hauteur : 3 dm.

2.9.25 Rayon : $\dfrac{8}{3}$ cm, hauteur : 4 cm.

Fonctions trigonométriques réciproques

2.10.1

a) $-\pi/4$
b) $2\,\pi/3$
c) $-\pi/3$
d) $\pi/3$
e) $\pi/4$
f) $\pi/6$
g) non défini
h) non défini
i) $\pi/4$
j) $-3/10$
k) $1/2$
l) 14
m) $\pi/3$
n) $5\,\pi/6$
o) $-\pi/6$
p) $-\pi/4$
q) $3\,\pi/4$
r) $-\pi/4$
s) $\sqrt{3}/2$
t) $\sqrt{2}/2$
u) non défini

2.10.2

12 m

2.10.3

a) $\alpha = \theta - \arcsin\left(\frac{d}{k}\right)$

b) $\alpha = 39.63\,^\circ$

2.10.4

a) $\theta(x) = \arctan\left(\dfrac{12\,x}{4\,x^2-5}\right)$

b) $x = \dfrac{3+\sqrt{14}}{2} \simeq 3.37$ m

2.10.5

a) $f'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-16\,x^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$

c) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$

d) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^2}}$

e) $f'(x) = 2\,x\cdot\arcsin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\pi^2}{x^2}}}$

f) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2+9}$

g) $f'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}\;(4-x^2)}$

h) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin(x))^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{-9\,(1+\arccos(3\,x))^2}{\sqrt{1-9\,x^2}}$

j) $f'(x) = \dfrac{2\,x}{(1+x^4)\;\arctan(x^2)}$

2.10.6

a) $\theta(t) = \arctan\left(\frac{t^2}{16}\right)$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{32\,t}{t^4+256}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{32\;(256-3\,t^4)}{(t^4+256)^2}$

b) $h = 40\sqrt{3} \simeq 69.28$ m

2.10.7

$-8/365 \simeq -0.022$ rad/s

2.10.8

$(\pm 4/15\,;\ \arcsin(\pm 12/15)) \simeq (\pm 0.267\,;\ \pm 0.927)$

Chapitre 3

Géométrie

3.1 La droite dans le plan

3.1.1 On donne une droite d par l'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Représenter les points de d correspondant aux valeurs entières du paramètre k variant entre -2 et 2.

3.1.2 Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x & = 1 - 5k \\ y & = 2 + 3k \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$?

$$(6; -1),\ (3; -2),\ (1; 0),\ \left(-6; \frac{31}{5}\right)$$

3.1.3 On donne la droite d'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

a) situé sur Ox,

b) situé sur Oy,

c) qui a une abscisse égale à 7,

d) qui a une ordonnée égale à -2,

e) dont les deux coordonnées sont égales,

f) situé sur la droite $\begin{cases} x & = 1 + l \\ y & = -5 - 8l \end{cases}$, avec $l \in \mathbb{R}$.

3.1.4 Trouver une équation paramétrique de la droite donnée par :

a) $A(3;5)$ et un vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $A(-3;-2)$ et $B(4;-5)$,

c) $A(2;-4)$, de pente $-\frac{3}{4}$,

d) $A(5;2)$, parallèle au segment BC, où $B(1;1)$ et $C(-3;2)$,

e) $A(-7;10)$, perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$,

f) $A(0;-2)$, horizontale,

g) $A(8;12)$, verticale.

3.1.5 Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation cartésienne $3x - 8y + 2 = 0$?

$$\left(0;\frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{2}{3};0\right),\ (5;-1),\ (2;1)$$

3.1.6 On donne la droite d'équation cartésienne $-3x + 2y - 6 = 0$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

a) d'abscisse 3,

b) d'ordonnée -4,

c) dont les deux coordonnées sont égales,

d) situé sur Ox,

e) situé sur Oy,

f) situé sur la droite d'équation cartésienne $5x - 7y + 4 = 0$.

3.1.7 Déterminer l'équation cartésienne de chacune des droites de l'exercice 3.1.4.

3.1.8 Déterminer les équations cartésiennes des médianes du triangle dont les sommets sont $A(3;-2)$, $B(-3;2)$, $C(0;-1)$, ainsi que les coordonnées de son centre de gravité.

3.1.9 Dessiner les droites données par leurs équations cartésiennes :

a) $2x - 3y + 6 = 0$ b) $5x + 3y - 15 = 0$

c) $7x + 3y = 0$ d) $2x + 5 = 0$

e) $-3y + 9 = 0$ f) $2x = 0$

g) $-5y = 0$ h) $4(x + 2) = 5(y - 3)$

3.1.10 Calculer la pente de la droite d'équation $5x + 7y - 21 = 0$.

3.1.11 Calculer l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $5x - 8y + 56 = 0$.

3.1.12 Déterminer un vecteur directeur et la pente des droites suivantes, données par leurs équations :

a) $5x - 6y - 7 = 0$ b) $x + y - 5 = 0$

c) $4x - 3y = 0$ d) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{15} = 0$

e) $\sqrt{5}x - 4y - 5 = 0$ f) $3y - 8 = 0$

g) $x = 0$ h) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{4}$

3.1.13 Montrer que les équations suivantes définissent toutes la même droite.

a) $3x + 2y - 11 = 0$ b) $6x + 4y = 22$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$ d) $\begin{cases} x &= 5 - 2l \\ y &= -2 + 3l \end{cases}$, avec $l \in \mathbb{R}$

e) $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$ f) $\dfrac{x-9}{-2} = \dfrac{y+8}{3}$

3.1.14 Déterminer, dans chacun des cas, l'équation cartésienne de la parallèle à la droite d passant par A :

a) $d : 7x - 6y = 7$ $A(1; 1)$

b) $d : 5x = 5 - 2y$ $A(-2; -1)$

c) $d : y = 9 - 7x$ $A(2; -2)$

3.1.15 D'un parallélogramme $ABCD$, on donne le sommet $A(8; 0)$, l'équation du côté CD : $x-2y+5 = 0$, ainsi que l'équation de la diagonale BD : $6x-25y = -43$. Déterminer les équations cartésiennes des côtés AB, AD et BC.

3.1.16

a) Déterminer l'équation cartésienne de la parallèle d_1 à Ox passant par $A(2;2)$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de la parallèle d_2 à Oy passant par $B(6;-4)$.

c) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d_3 passant par $P(1;2)$ et par le milieu du segment d'extrémités A et B.

d) Calculer l'aire du triangle formé par les droites d_1, d_2 et d_3.

3.1.17 Déterminer l'équation cartésienne de la droite qui passe par $A(2;-3)$ et qui est perpendiculaire à :

a) $3x - 7y + 3 = 0$

b) $x + 9y = 11$

c) $16x = 24y - 7$

d) $2x + 3 = 0$

e) $3y = 1$

3.1.18 Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(-6;4)$ sur la droite d d'équation $4x = 5y - 3$.

3.1.19 Calculer les coordonnées du symétrique du point $P(-5;13)$ relativement à la droite $d : 3y + 3 = 2x$.

3.1.20 Déterminer les équations cartésiennes des hauteurs du triangle de sommets $A(2;1)$, $B(-1;-1)$, $C(3;2)$, ainsi que les coordonnées de son orthocentre.

3.1.21 Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice d'un segment $[AB]$ si l'on donne $A(2;-3)$ et $B(-5;-2)$.

3.1.22 Déterminer les équations cartésiennes des médiatrices du triangle de sommets $A(1;8), B(3;4)$, $C(-6;1)$, ainsi que les coordonnées du centre et le rayon de son cercle circonscrit.

3.1.23 On donne les équations de deux côtés et d'une diagonale d'un rectangle : $x = 2y$, $2y - x = 15$ et $7x + y = 15$. Calculer les coordonnées de ses sommets.

3.1.24 D'un triangle ABC, on donne l'équation du côté $AB : 5x - 3y + 2 = 0$, celle de la hauteur issue de A $h_A : 4x = 3y - 1$ ainsi que celle de la hauteur issue de B $h_B : 7x + 2y = 22$. Calculer les coordonnées du point C.

3.1.25 Déterminer les équations cartésiennes des côtés d'un triangle ABC connaissant $C(4;-1)$, ainsi que les équations d'une hauteur $h\ :\ 2x =\ 3y -\ 12$ et d'une médiane $m : 2x + 3y = 0$ issues d'un même sommet.

3.1.26 Déterminer les équations cartésiennes des côtés d'un triangle ABC connaissant $B(5;-5)$, ainsi que les équations d'une hauteur $h : 3x - 4y + 27 = 0$ et d'une bissectrice $b : 2x - y + 5 = 0$ issues de sommets différents.

3.1.27 Deux droites d_1 et d_2 sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont concourantes, parallèles ou confondues et, selon les cas, leur point commun ou leur pente commune :

a) $d_1 : 3x - 5y + 7 = 0$ $\quad d_2 : 2x - 4y - 8 = 0$

b) $d_1 : -4x + 20y + 36 = 0$ $\quad d_2 : x - 5y = 9$

c) $d_1 : -7x - 8y + 2 = 0$ $\quad d_2 : 4x - 3y + 4 = 0$

d) $d_1 : 8x - 2y + 36 = 0$ $\quad d_2 : y = 4x + 25$

3.1.28 Prouver que les quatre droites : $a : 2x + y = 3$, $b : x = 3y - 1$, $c : 3x + 5y - 7 = 0$ et $d : 4x - 5y = 1$ sont concourantes en un point.

3.1.29 Soit $d_1 : (a-1)x + (3a-1)y + (4a-4) = 0$ et $d_2 : (2a-2)x + (2a-1)y + (4a-7) = 0$ des droites. Existe-t-il des valeurs de a telles que d_1 et d_2 soient

a) confondues,

b) parallèles,

c) perpendiculaires ?

3.2 Questions métriques dans le plan

3.2.1 Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par $A(-1;-5)$ et d'angle directeur 120°.

3.2.2 Calculer l'angle aigu déterminé par les droites suivantes :

a) $d_1 : 5x - y = 7$ $\quad d_2 : 3x + 2y = 0$

b) $d_1 : 2y = 3x + 7$ $\quad d_2 : 2x + 3y = 5$

c) $d_1 : x = 2y + 4$ $\quad d_2 : 2x - 4y + 3 = 0$

d) $d_1 : 3x + 2y = 1$ $\quad d_2 : 5x = 2y - 3$

3.2.3 Déterminer l'équation cartésienne de la droite d_1 passant par $M(2;1)$ et déterminant avec la droite $d_2 : 2x+3y+4=0$ un angle $\measuredangle(d_1;d_2) = -45\,^\circ$.

3.2.4 Un rayon lumineux parcourt la droite $d : x = 2y-5$, et il se réfléchit sur la droite $e : 2y = 3x+7$. Quelle est l'équation cartésienne du rayon réfléchi ?

3.2.5 Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants :

a)	$P(2;-1)$	$d : 4x+3y+10=0$
b)	$P(0;-3)$	$d : 5x = 12y+23$
c)	$P(-2;3)$	$d : 4y = 3x-2$
d)	$P(1;-2)$	$d : x = 2y+5$

3.2.6 Calculer l'aire d'un carré dont l'un des sommets est $A(2;-5)$ et dont l'un des côtés a pour support la droite $d : x = 2y+7$.

3.2.7 Un triangle ABC est déterminé par les équations de ses côtés : $AB : x+y+1=0$, $BC : x+3y+3=0$ et $AC : 2x+3y=0$. Calculer la longueur de sa hauteur issue de C.

3.2.8 Quelles sont les équations cartésiennes des droites situées à une distance de 6 de la droite $d : 6x-8y+5=0$?

3.2.9 Le point $A(-5;0)$ est le sommet d'un rectangle $ABCD$ d'aire 20 dont le côté BC est porté par la droite $d : 3x-4y-5=0$. Déterminer les équations cartésiennes des côtés AB, AD et CD.

3.2.10 Trouver les points équidistants des points $A(0;1)$ et $B(2;5)$, qui sont situés à une distance de 2 de la droite $d : 3x-4y-4=0$.

3.2.11 Calculer la distance entre les deux droites parallèles $d_1 : 3x+4y-13=0$ et $d_2 : 3x+4y-3=0$, puis déterminer l'équation cartésienne de la droite équidistante de d_1 et d_2.

3.2.12 Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle déterminé par les droites d'équation $2x = 3y+5$ et $4y = 6x+7$ qui coupe Ox dans sa partie négative.

3.2.13 Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle aigu déterminé par les droites d'équation $3x + 4y = 5$ et $12y = 5x + 3$.

3.2.14 Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice déterminé par les droites d'équation $x = 3y - 5$ et $y = 3x + 15$ et qui passe par le point $J(-1; -4)$.

3.2.15 Déterminer les équations cartésiennes des droites passant par $P(2; -1)$ et qui forment avec les droites d'équation $y = 2x + 5$ et $3x + 6y = 1$ des triangles isocèles en l'intersection de ces droites.

3.2.16 Un triangle ABC est déterminé par les équations de ses côtés : $AB : 4x + 3y + 24 = 0$, $BC : 3x = 4y$ et $AC : 3x + 4y = 12$. Calculer les coordonnées du centre du cercle exinscrit du triangle dont le centre se trouve sur la bissectrice intérieure issue de C.

3.3 Le cercle

3.3.1 Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent un cercle. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle :

a) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$

b) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$

c) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 0$

d) $x^2 + (y - 5)^2 = 5$

e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$

f) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

g) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

h) $x^2 + y^2 + x = 0$

i) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$

j) $x^2 + y^2 + y = 0$

k) $80x^2 + 80y^2 - 120x + 80y + 17 = 0$

l) $144x^2 + 144y^2 - 216x + 192y = -145$

3.3.2 Déterminer l'équation des cercles définis par les conditions suivantes :

a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.

b) Le centre est $C(2; -3)$ et le rayon est égal à 7.

c) Le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6; -8)$.

d) Le cercle passe par $A(2; 6)$ et son centre est $C(-1; 2)$.

e) Les points $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$ sont les extrémités d'un diamètre.

f) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à $d : 3\,x - 4\,y + 20 = 0$.

g) Le centre est $C(1; -1)$ et le cercle est tangent à $d : 5\,x + 9 = 12\,y$.

h) Le cercle passe par $A(3; 1)$ et par $B(-1; 3)$ et son centre est sur $d : 3\,x = y + 2$.

i) Le cercle passe par $A(1; 1)$, par $B(1; -1)$ et par $C(2; 0)$.

3.3.3 Déterminer la position relative des deux objets suivants :

a) la droite $y = 2x - 3$ et le cercle $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$;

b) la droite $x - 2y - 1 = 0$ et le cercle $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

c) la droite $y = x + 10$ et le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

3.3.4 Déterminer la position relative des cercles

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2 : x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$$

3.3.5 Déterminer l'équation du diamètre du cercle $x^2 + y^2 + 4\,x - 6\,y = 17$ qui est perpendiculaire à la droite $5\,x + 2y = 13$.

3.3.6 Calculer la plus courte distance d'un point du cercle $x^2 + y^2 - 26\,x + 30\,y = -313$ au point $B(3; 9)$.

3.3.7 Déterminer l'équation du diamètre du cercle $\gamma : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ qui passe par le point milieu de la corde de support $d : 2\,x + y = 13$.

3.3.8 Calculer la longueur de la corde commune aux cercles $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 10\,x + 10\,y$ et $\gamma_2 : x^2 + y^2 + 6\,x + 2\,y = 40$.

3.3.9 Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4\,x - 5\,y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites $2\,x = 3\,y + 10$ et $2\,y = 3\,x + 5$.

3.3.10 Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2\,x + y = 0$, est tangent aux droites $3\,y = 4\,x + 10$ et $4\,x = 3\,y + 30$.

3.3.11 Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2\,y = \ 1$ au point $T(3; ?)$.

3.3.12 Déterminer les équations des cercles tangents aux droites

$$y = 7\,x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0$$

l'un des points de contact étant $T(1;2)$.

3.3.13 Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2\,y = 9$ et $y = 2\,x + 2$.

3.3.14 Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites $3\,y = 4\,x - 10$, $3\,x = 4\,y + 5$ et $3\,x - 4\,y = 15$.

3.3.15 Déterminer l'équation du symétrique du cercle $x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 4 = 0$ relativement à la droite $x = y + 3$.

3.3.16 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle γ, Déterminer les équations des tangentes à γ au point T dans les cas suivants :

a) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 5$;

b) $T(-5;7)$ et $\gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$;

c) $T(0;0)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y$;

d) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$;

e) $T(2;3)$ et $\gamma : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$;

f) $T(2;1)$ et $\gamma : 3x^2 + 3y^2 = 2x + 11$.

3.3.17 Calculer la valeur de l'angle[1] aigu formé par la droite $3\,x - y = 1$ et le cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

3.3.18 Calculer l'angle[2] sous lequel se coupent les cercles $(x - 3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$.

3.3.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$, de direction donnée par la droite $2\,x + y = 7$.

1. L'*angle d'une droite et d'un cercle* est l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en l'un des points d'intersection
2. L'*angle de deux cercles* est l'angle formé par les tangentes aux cercles en l'un des points d'intersection

3.3.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2\,y + 345$.

3.3.21 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2\,x$ issues du point $A(1;6)$, ainsi que les coordonnées du point de contact.

3.3.22 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 20$ issues du point $A(6;5)$, ainsi que les coordonnées des deux points de contact.

3.3.23 On mène par le point $A(4;2)$ les tangentes au cercle $x^2+y^2 = 10$. Calculer l'angle entre ces tangentes.

3.3.24 On mène par le point $A(4;-4)$ les tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 6\,x - 2\,y - 5$. Calculer la longueur de la corde passant par les points de tangence.

3.4 La droite dans l'espace

3.4.1 On donne les droites $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = y + 4 = \dfrac{z}{5}$ et

$$d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Les points $A(3;-3;5)$ et $B\,(-1/2;3/2;2)$ appartiennent-ils à ces droites ?

3.4.2 On donne la droite d'équation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

a) situé sur Ox,

b) qui a une ordonnée égale à 5,

c) dont l'abscisse et la cote sont égales,

d) situé sur la droite $\begin{cases} x &= -7 + l \\ y &= -l \\ z &= -1 + 2l \end{cases}$, avec $l \in \mathbb{R}$.

3.4.3 Déterminer une équation paramétrique de la droite :

a) qui passe par $A(1;2;3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

b) qui passe par $A(2;3;5)$ et $B(1;5;7)$,

c) qui passe par $A(-3;5;2)$ et est parallèle à l'axe Oz,

d) qui passe par $A(8;6;-12)$ et est parallèle au segment BC, avec $B(4;0;-2)$ et $C(5;-2;3)$.

3.4.4 Montrer que les équations suivantes définissent toutes la même droite :

$$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 + 4k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ avec } u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{8}$$

3.4.5 Deux droites d_1 et d_2 sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont concourantes, parallèles, confondues ou gauches et, selon les cas, leur éventuel point commun :

a) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -2 - 5k \\ z = 5 + k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\qquad d_2 : \begin{cases} x = -2 - 6n \\ y = 3 + 10n \\ z = 4 - 2n \end{cases}$, avec $n \in \mathbb{R}$

b) $d_1 : \begin{cases} x = 2 - 5k \\ y = 3 + 2k \\ z = 5 - 4k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\qquad d_2 : \begin{cases} x = 2 - 5n \\ y = 3 - 2n \\ z = 5 - 4n \end{cases}$, avec $n \in \mathbb{R}$

c) $d_1 : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-5}{-6} = \dfrac{z-3}{3}$ $\qquad d_2 : \begin{cases} x = 6 + 4k \\ y = -1 - 12k \\ z = 5 - 5k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$

d) $d_1 : \begin{cases} x + y = 4 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$ $\qquad d_2 : \begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

3.5 Le plan dans l'espace

3.5.1 On donne les plans $\alpha : 2x + 3y - 3z - 5 = 0$ et

$$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les points $A(-2;7;8)$ et $B\,(4;3/2;5/2)$ appartiennent-ils à ces plans ?

3.5.2 Déterminer une équation paramétrique du plan α :

a) qui passe par $A(1;-2;3)$ et a pour vecteurs directeurs

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) qui passe par les points $A(2;5;1)$, $B(-1;7;0)$ et qui est parallèle au vecteur

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) qui passe par $A(1;-2;3)$, $B(5;2;1)$ et $C(2;5;2)$,

d) qui passe par $A(5;2;-2)$ et est parallèle au plan Oxy,

3.5.3 Montrer que les équations suivantes définissent toutes le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad\qquad 3x + 3z = 39 - 6y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3.5.4 Calculer les composantes d'un vecteur normal à chacun des plans suivants :

a) $2x - y - 2z + 5 = 0$

b) $x + 5y - z = 0$

c) $3x - 2y - 7 = 0$

d) $5y - 3z = 0$

e) $x + 2 = 0$

f) $3y + 5 = 0$

3.5.5 Déterminer l'équation cartésienne du plan α :

a) qui passe par $P(2;1;-1)$ et est normal au vecteur $(1;-2;3)$;

b) qui passe par $P(-6;10;16)$ et est perpendiculaire à la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$;

c) qui passe par l'origine et est perpendiculaire au segment AB, avec

$$A(1;0;5) \quad \text{et} \quad B(3;-3;8);$$

d) qui passe par $P(1;-2;4)$ et est parallèle au plan d'équation $5x+2y-z+5=0$.

3.5.6 Déterminer l'équation cartésienne de chacun des plans de l'exercice 3.5.2.

3.5.7 Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par $A(2;-1;1)$ et qui est perpendiculaire aux plans d'équation $2x-z+1=0$ et $y=0$.

3.5.8 Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par $A(1;-1;2)$, par $B(3;1;1)$ et qui est perpendiculaire au plan $x-2y+3z-5=0$.

3.5.9 Déterminer une équation paramétrique de la normale au plan d'équation $6x-3y+5z+2=0$ issue du point $P(2;-3;-5)$.

3.5.10 Former l'équation cartésienne du plan qui passe par $M(1;2;-3)$ et qui est parallèle aux droites

$$d:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad e:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\1\\3\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

avec $k,l\in\mathbb{R}$.

3.5.11 Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant le point $M(2;-2;1)$ et la droite

$$d:\begin{cases}x=1+2k\\y=2-3k\\z=-3+2k\end{cases}$$

avec $k\in\mathbb{R}$.

3.5.12 Une droite et un plan sont donnés par leurs équations. Déterminer si ils sont concourants, parallèles ou inclus l'un dans l'autre et, selon les cas, leur intersection.

a) $d:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$, avec $k\in\mathbb{R}$ $\qquad\alpha:2x+y-z+15=0$

b) $d:x-1=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ $\qquad\alpha:2x+3y+z-1=0$

c) $d:\begin{cases}x+y-3z=3\\x-y-z=1\end{cases}$, avec $k\in\mathbb{R}$ $\qquad\alpha:x+2y-4z-4=0$

3.5.13 Deux plans sont donnés par leurs équations. Déterminer s'ils sont concourants, parallèles ou confondus et, selon les cas, leur intersection.

a) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ $\quad\beta : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$

b) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ $\quad\beta : \begin{cases} x = 4 + 2k + 5n \\ y = 2 + 3k \\ z = -3n \end{cases}$, avec $k, n \in \mathbb{R}$

c) $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3k - 2n \\ y = 1 - k + n \\ z = 3 + k - n \end{cases}$, avec $k, n \in \mathbb{R}$ $\quad\beta : \begin{cases} x = 2 + p + 5q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 2q \end{cases}$, avec $p, q \in \mathbb{R}$

3.5.14 Calculer les coordonnées du point d'intersection des plans $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ et $x - 3y + 2z - 11 = 0$.

3.5.15 Démontrer que les plans d'équations $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ et $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ont une droite commune dont on donnera les équations cartésiennes.

3.6 Problèmes métriques dans l'espace

3.6.1 Calculer l'angle aigu déterminé par les droites d'équations :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

3.6.2 Calculer l'angle aigu déterminé par les plans α et β :

a) $\alpha : 3y - z = 0$ $\quad\beta : 2y + z = 0$

b) $\alpha : \begin{cases} x = 5 + 4\lambda - \mu \\ y = -7 + 1\lambda + 2\mu \\ z = 11 + 3\lambda + 5\mu \end{cases}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $u, v \in \mathbb{R}$

3.6.3 Calculer l'angle aigu entre la droite $d : \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 5k \\ z = -3 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$, et le plan $\alpha : 2x + 3y + 4z = 0$.

3.6.4 Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants :

a) $P(-5;4;-2)$ $\quad d : \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = k - 1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$,

b) $P(5;-2;1)$ $\quad d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

3.6.5 Vérifier que les droites d'équations $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$, et $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{1-z}{9}$ sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.

3.6.6 Calculer la distance des droites a et b lorsque :

a) $a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\quad b : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{R}$

b) $a : \dfrac{x-3}{-6} = y + 1 = \dfrac{z-4}{2}$ $\quad b : \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = k - 4 \\ z = k + 1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$

3.6.7 Considérons les droites concourantes d_1 et d_2 données ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2n \\ y = 4 - n \\ z = 2 - 3n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations paramétriques de leurs bissectrices b_1 et b_2.

3.6.8 Calculer la distance du point P au plan α dans les cas suivants :

a) $P(-8;7;0)$ $\quad \alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0$,

b) $P(6;1;-2)$ $\quad \alpha : \begin{cases} x = 3 - 4\lambda + 8\mu \\ y = 2 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 6\mu \end{cases}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.6.9 Vérifier que les plans d'équations $3x + 12y - 4z = 18$ et $-6x - 24y + 8z - 146 = 0$ sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.

3.6.10 Trouver les équations des plans situés à une distance 6 du plan d'équation

$$\alpha : \ 9\,x + \ 2\,y - \ 6\,z - \ 8 = \ 0$$

3.6.11 Déterminer les équations des plans bissecteurs des plans $\alpha : 3x + 6z = 2y + 20$ et $\beta : z + 2 = 0$.

3.6.12 Calculer les coordonnées des points de la droite d'équation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

qui sont équidistants des plans α et β d'équations respectives

$$6\,x - y - 2\,z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad 3\,x + 4\,y = 4\,z + 9$$

3.6.13 Déterminer les points d'abscisse 2 équidistants des points

$$A(-1; 5; 4) \quad \text{et} \quad B(1; -1; -2)$$

qui sont situés à une distance de 3 du plan Oxz.

3.7 La sphère

3.7.1 Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent une sphère. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon de la sphère :

a) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x = 14y + 8z - 69$

d) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 108x + 96y + 109 = 144z$

3.7.2 Déterminer l'équation des sphères définies par les conditions suivantes :

a) le centre est $C(0;2;-4)$ et le rayon est égal à 5,

b) le centre est $C(1;-2;4)$ et elle passe par le point $P(3;2;-1)$,

c) l'un de ses diamètres est $[AB]$, où $A(-1;0;5)$ et $B(7;4;-7)$,

d) elle passe par les points $A(4;2;-3)$ et $B(-1;3;1)$, et a son centre sur la droite $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$

e) elle est centrée à l'origine et tangente à la droite d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$,

f) le centre est $C(4;1;-5)$ et elle est tangente au plan d'équation $x + 2y + 2z = 4$,

g) elle passe par les points $M(0;3;-4)$, $N(2;2;-3)$ et $P(10;1;-8)$, et son rayon vaut $5\sqrt{2}$,

h) elle passe par les points $R(-2;2;3)$, $S(0;4;1)$ et $T(-5;5;-1)$, et a son centre sur le plan d'équation $x + 3y = 2z + 7$,

i) elle passe par les quatre points $E(5;7;-2)$, $F(3;1;0)$, $G(-5;12;3)$ et $H(-3;-2;-1)$,

j) elle passe par les points $M(8;8;9)$, $N(-1;-1;9)$ et $P(11;5;9)$, et est tangente au sol.

3.7.3 Déterminer la position relative de la sphère $\Sigma : (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-10)^2 = 25$ et de la droite $d : \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y+4}{-6} = z - 5$.

3.7.4 Le système d'équations $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$ détermine-t-il un cercle ? Si oui, calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

3.7.5 Montrer que les deux sphères d'équations :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$$

sont tangentes intérieurement et déterminer l'équation cartésienne de leur plan tangent commun.

3.7.6 On donne la sphère Σ et le point T. Après avoir vérifié que T appartient à Σ , trouver l'équation cartésienne du plan tangent à Σ au point T :

a) $\Sigma : (x+3)^2 + (y-15)^2 + (z-2)^2 = 225$ $\qquad T(7;4;4)$,

b) $\Sigma : (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 289$ $\qquad T(14;4;-6)$,

c) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y + 6z = 27$ $\qquad T(-2;12;-5)$,

d) $\Sigma : 49x^2 + 49y^2 + 49z^2 + 42y + 34 = 70x + 294z$ $\qquad T\left(3;-1;\frac{8}{7}\right)$.

3.7.7 On donne la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 216$, ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations cartésiennes des plans perpendiculaires à d et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

3.7.8 On donne la sphère $\Sigma : (x-3)^2+(y-1)^2+z^2 = 169$ et le plan $\alpha : 12x+4y+3z-12 = 0$. Déterminer les équations cartésiennes des plans parallèles à α et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

3.7.9 Un rayon lumineux issu de $A(5;1;2)$ est réfléchi d'abord sur le plan α d'équation $3x + y + 4z + 2 = 0$, le point d'incidence étant $R(1;3;?)$, puis sur la sphère de centre $M(6;13;6)$ et de rayon $\sqrt{24}$.

a) Déterminer les équations paramétriques des deux rayons réfléchis.

b) Déterminer la distance entre le rayon incident et le deuxième rayon réfléchi.

3.7.10 On donne les points $A(2;9;6)$ et $B(8;1;10)$ ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

a) Calculer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère passant par A et B et dont le centre est sur d.

b) La sphère coupe-t-elle le plan d'équation $6x + 3y - 2z + 25 = 0$?

c) Quelle est, sur la sphère, la plus courte distance entre A et B ?

d) Déterminer une équation paramétrique d'un axe de rotation laissant la sphère invariante et qui échange les points A et B.

3.7.11 Un cône de révolution a pour sommet $S(0;0;0)$ et son axe passe par $A(1;1;-1)$. Le cercle de base du cône passe par $Q(0;6;-18)$.

a) Calculer le demi-angle d'ouverture du cône.

b) Calculer la longueur de la hauteur du cône.

c) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère qui est tangente intérieurement au cône en le point Q.

3.7.12 On donne les plans $\alpha : 8x+y-4z=9$ et $\beta : 6x+3y-2z=5$, ainsi que le point $P(2;-3;?)$ de α. Déterminer l'équation des sphères tangentes à α en P et tangentes à β.

3.7.13 On considère la famille de droites d_k passant par $M(3;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}_k=(2;1;k)$, où k est un paramètre.

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan α contenant d_0 et d_1, et prouver qu'il est perpendiculaire au plan $\pi : z=0$.

b) Montrer que toutes les droites d_k sont contenues dans α.

c) Déterminer k pour que d_k soit tangente à la sphère Σ d'équation $x^2+y^2+z^2=9$.

d) Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle intersection de Σ et de α.

3.8 Solutions des exercices

La droite dans le plan

3.1.1 –

3.1.2 Oui, non, non, oui.

3.1.3 a) $\left(\frac{9}{2};0\right)$; b) $(0;9)$; c) $(7;-5)$; d) $\left(\frac{11}{2};-2\right)$; e) $(3;3)$; f) $(-1;11)$.

3.1.4 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$; b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$;
c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$; d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$;
e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$; f) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$;
g) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

3.1.5 Oui, oui, non, oui.

3.1.6 a) $\left(3;\frac{15}{2}\right)$; b) $\left(-\frac{14}{3};-4\right)$; c) $(-6;-6)$; d) $(-2;0)$; e) $(0;3)$; f) $\left(-\frac{34}{11};-\frac{18}{11}\right)$.

3.1.7 a) $x+4y-23=0$; b) $3x+7y+23=0$; c) $3x+4y+10=0$; d) $x+4y-13=0$; e) $8x-5y+106=0$; f) $y+2=0$; g) $x-8=0$.

3.1.8 $m_A : 5x+9y+3=0$, $m_B : 7x+9y+3=0$, $m_C : x=0$ et $G\left(0;-\frac{1}{3}\right)$.

3.1.9 –

3.1.10 $m=-\frac{5}{7}$.

3.1.11 $h=7$.

3.1.12 a) $\vec{d}=\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $m=\frac{5}{6}$; b) $\vec{d}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $m=-1$; c) $\vec{d}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $m=\frac{4}{3}$;
d) $\vec{d}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $m=1$; e) $\vec{d}=\begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, $m=\frac{\sqrt{5}}{4}$; f) $\vec{d}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $m=0$;
g) $\vec{d}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $m=\infty$; h) $\vec{d}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $m=\frac{4}{5}$.

3.1.13 –

3.1.14 a) $7x-6y-1=0$; b) $5x+2y+12=0$; c) $7x+y-12=0$.

3.1.15 $AB : x - 2y - 8 = 0$, $AD : x + 11y - 8 = 0$ et $BC : x + 11y - 99 = 0$

3.1.16 a) $y - 2 = 0$; b) $x - 6 = 0$; c) $x + y - 3 = 0$; d) $\dfrac{25}{2}$.

3.1.17 a) $7x + 3y - 5 = 0$; b) $9x - y - 21 = 0$; c) $3x + 2y = 0$; d) $y + 3 = 0$; e) $x - 2 = 0$.

3.1.18 $(-2; -1)$.

3.1.19 $(11; -11)$.

3.1.20 $h_A : 4x + 3y - 11 = 0$, $h_B : x + y + 2 = 0$, $h_C : 3x + 2y - 13 = 0$, $H(17; -19)$.

3.1.21 $7x - y + 8 = 0$.

3.1.22 $m_{AB} : x - 2y + 10 = 0$, $m_{BC} : 3x + y + 2 = 0$, $m_{AC} : x + y - 2 = 0$, $K(-2; 4)$ et $r = 5$.

3.1.23 $(2; 1), (4; 2), (-1; 7), (1; 8)$.

3.1.24 $C(6; 1)$.

3.1.25 $3x + 7y - 5 = 0, 3x + 2y - 10 = 0$ et $9x + 11y + 5 = 0$.

3.1.26 $AB : 4x + 5y + 5 = 0$, $AC : y - 3 = 0$, $BC : 4x + 3y - 5 = 0$.

3.1.27 a) concourantes en $I(-34; -19)$; b) confondues, $m = \frac{1}{5}$; c) concourantes en $I\left(-\frac{26}{53}; \frac{36}{53}\right)$; d) parallèles, $m = 4$.

3.1.28 Les droites sont concourantes en $I\left(\frac{8}{7}; \frac{5}{7}\right)$.

3.1.29 a) $a = \dfrac{1}{4}$; b) $a = 1$; c) -.

Questions métriques dans le plan

3.2.1 $\sqrt{3}x + y + 5 + \sqrt{3} = 0$.

3.2.2 a) $45\,^\circ$; b) $90\,^\circ$; c) $0\,^\circ$; d) $55,49\,^\circ$.

3.2.3 $x - 5y + 3 = 0$.

3.2.4 $29x - 2y + 33 = 0$.

3.2.5 a) 3 ; b) 1 ; c) 4 ; d) 0.

3.2.6 5.

3.2.7 $\sqrt{2}$.

3.2.8 $6x - 8y - 55 = 0$ et $6x - 8y + 65 = 0$.

3.2.9 $AB : 4x + 3y + 20 = 0$, $AD : 3x - 4y + 15 = 0$, $CD : 4x + 3y - 5 = 0$ ou $4x + 3y + 45 = 0$.

3.2.10 $\left(\frac{8}{5}; \frac{27}{10}\right)$ et $\left(\frac{28}{5}; \frac{7}{10}\right)$.

3.2.11 2 ; $3x + 4y - 8 = 0$.

3.2.12 $2x + 2y + 17 = 0$.

3.2.13 $7x + 56y - 40 = 0$.

3.2.14 $x + y + 5 = 0$.

3.2.15 $x - 3y - 5 = 0$ et $3x + y - 5 = 0$.

3.2.16 $\left(-\frac{69}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Le cercle

3.3.1

a) $C(5; -2) \quad r = 5$

b) $C(-2; 0) \quad r = 8$

c) $C(5; -2) \quad r = 0$
Il s'agit d'un point !

d) $C(0; 5) \quad r = \sqrt{5}$

e) $C(1; -2) \quad r = 5$

f) $\emptyset$

g) $C(-2; 1) \quad r = 0$
Il s'agit d'un point !

h) $C\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \quad r = \frac{1}{2}$

i) $\emptyset$

j) $C\left(0; -\frac{1}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}$

k) $C\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right) \quad r = \sqrt{0.6}$

l) $C\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{3}\right) \quad r = 0$
Il s'agit d'un point !

3.3.2

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$

c) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$

d) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

e) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$

f) $x^2 + y^2 = 16$

g) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

h) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$

i) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

3.3.3

a) La droite coupe le cercle.

b) La droite est tangente au cercle.

c) La droite et le cercle sont disjoints.

3.3.4 Les cercles sont tangents extérieurement.

3.3.5 $2\,x - 5\,y + 19 = 0$

3.3.6 17

3.3.7 $x - 2\,y - 4 = 0$

3.3.8 10

3.3.9 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}$ et $(x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}$

3.3.10 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

3.3.11 $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$ et $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$

3.3.12 $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 50$ et $(x-29)^2 + (y+2)^2 = 800$

3.3.13 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ et $\left(x - \frac{22}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{31}{5}\right)^2 = \frac{289}{5}$

3.3.14 $\left(x + \frac{10}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{7}\right)^2 = 1$ et $\left(x - \frac{30}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{7}\right)^2 = 1$

3.3.15 $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$

3.3.16

a) $x - 2\,y + 5 = 0$

b) $3\,x - 4\,y + 43 = 0$

c) $3\,x - 7\,y = 0$

d) $2\,x - 5\,y + 12 = 0$

e) $7\,x + 8\,y - 38 = 0$

f) $5\,x + 3\,y - 13 = 0$

3.3.17 45°

3.3.18 90°

3.3.19 $2\,x + y - 1 = 0$ et $2\,x + y + 19 = 0$

3.3.20 $2\,x + y - 5 = 0$ et $2\,x + y + 5 = 0$

3.3.21 $2\,x + y - 8 = 0$ et $x - 2\,y + 11 = 0$ $T_1(3;2)$ $T_2(-3;4)$

3.3.22 $x = 6$ et $12\,x - 35\,y + 103 = 0$ $T_1(6;-2)$ $T_2\left(-\frac{23}{37};\frac{101}{37}\right)$

3.3.23 90°

3.3.24 $\sqrt{10}$

La droite dans l'espace

3.4.1 $A \in d_1$, $A \notin d_2$; $B \notin d_1$, $B \in d_2$.

3.4.2 a) $(-3;0;0)$; b) $(-28;5;-15)$; c) $\left(\frac{9}{2};-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$; d) $(-8;1;-3)$.

3.4.3

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$;

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

3.4.4 –

3.4.5 a) confondues ; b) concourantes en $(2;3;5)$; c) gauches ; d) parallèles.

Le plan dans l'espace

3.5.1 $A \notin \alpha$, $A \in \beta$; $B \in \alpha$, $B \notin \beta$.

3.5.2 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.5.3 –

3.5.4 a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.5.5 a) $x - 2y + 3z + 3 = 0$; b) $2x - y - 2z + 54 = 0$; c) $2x - 3y + 3z = 0$; d) $5x + 2y - z + 3 = 0$.

3.5.6 a) $x - y - z = 0$; b) $x + 2y + z - 13 = 0$; c) $5x + y + 12z - 39 = 0$; d) $z + 2 = 0$.

3.5.7 $x + 2z - 4 = 0$

3.5.8 $4x - 7y - 6z + 1 = 0$.

3.5.9 $(x; y; z) = (2; -3; -5) + k \cdot (6; -3; 5)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3.5.10 $9x + 11y + 5z - 16 = 0$

3.5.11 $4x + 6y + 5z - 1 = 0$

3.5.12 a) parallèles ; b) concourants en $(2; -3; 6)$; c) confondus.

3.5.13 a) concourants en $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$; b) parallèles ; c) confondus.

3.5.14 $(1; -2; 2)$

3.5.15 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{7} = \dfrac{z+3}{-5}$

Problèmes métriques dans l'espace

3.6.1 60°

3.6.2 a) 45° b) 87,47°

3.6.3 Environ 30.57°

3.6.4 a) $5 \cdot \sqrt{6}/2$ b) 15

3.6.5 $\sqrt{1162}/14$

3.6.6 a) 1 b) 3

3.6.7

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ avec } l \in \mathbb{R}$$

3.6.8 a) 8 b) 3

3.6.9 7

3.6.10 $9x + 2y - 6z - 74 = 0$ et $9x + 2y - 6z + 58 = 0$

3.6.11 Il s'agit des plans $3x - 2y - z - 34 = 0$ et $3x - 2y + 13z - 6 = 0$.

3.6.12 $(1/2; 5/2; -1/2)$ et $(-1; -1; -3)$.

3.6.13 $(2; 3; 2/3)$ et $(2; -3; 20/3)$.

La sphère

3.7.1 a) $C(2; 0; -1)$, $r = 3$; b) $\emptyset$; c) $C(-2; 7; 4)$, $r = 0$; d)$C\left(\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; 2\right)$, $r = \sqrt{5}$.

3.7.2 a) $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 25$; b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 45$;
c) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 56$; d) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 45$;
e) $x^2+y^2+z^2 = \frac{175}{3}$; f) $(x-4)^2+(y-1)^2+(z+5)^2 = \frac{64}{9}$; g) $(x-5)^2+(y-6)^2+(z+8)^2 = 50$, $(x - 35/11)^2 + (y - 6/11)^2 + (z + 108/11)^2 = 50$; h) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 9$;
i) $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 2)^2 = 65$; j) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 7)^2 = 49$.

3.7.3 d est extérieure à Σ.

3.7.4 Oui, on a $C(-1; 2; 3)$ et $r = 8$.

3.7.5 $2x + 6y - 3z - 63 = 0$

3.7.6 a) $10x - 11y + 2z - 34 = 0$; b) $12x + 8y - 9z - 254 = 0$; c) $3x - 7y + 2z + 100 = 0$;
d) $112x - 28y - 91z - 260 = 0$.

3.7.7 $7x - 2y - z - 108 = 0$, $7x - 2y - z + 108 = 0$, $(14; -4; -2)$, $(-14; 4; 2)$.

3.7.8 $12x + 4y + 3z - 209 = 0$, $12x + 4y + 3z + 129 = 0$, $(15; 5; 3)$, $(-9; -3; -3)$.

3.7.9 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $k, l \in \mathbb{R}$; b) $\frac{21}{\sqrt{29}}$.

3.7.10 a) $C(5; 3; 4)$, $r = 7$; b) non ; c) $12,29$; d) l'axe de rotation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

3.7.11 a) $43,09°$; b) $8\sqrt{3}$; c) $(x - 15)^2 + (y - 15)^2 + (z + 15)^2 = 315$.

3.7.12 $(x+6)^2+(y+4)^2+(z-5)^2 = 81$, $\left(x - \frac{138}{61}\right)^2 + \left(y + \frac{181}{61}\right)^2 + \left(z - \frac{53}{61}\right)^2 = \left(\frac{18}{61}\right)^2$.

3.7.13 a) $x - 2y + 3 = 0$; b) - ; c) $k = \pm 2$; d) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$, $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Chapitre 4

Puissances, racines, exponentielles et logarithmes

4.1 Puissances et racines

4.1.1 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$ c) $3^6 \cdot 5^6$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 5^{10}$ e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$ f) $\dfrac{5^8}{5^6}$

g) $\dfrac{5^6}{5^8}$ h) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5$ i) $\dfrac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

4.1.2 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2^2)^3$ b) $2^{(2^3)}$ c) $((-4)^2)^4$

d) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right)^6$ e) $\left(-\dfrac{2^4}{3^3}\right)^2$ f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \div \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$ h) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \div \left(\dfrac{9}{8}\right)^4$ i) $\dfrac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}}$

4.1.3 Calculer :

a) 4^{-2} b) 2^{-1} c) 3^{-3} d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$ e) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{-2}$ f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

4.1.4 Le produit de tous les nombres de chaque ligne et de chaque colonne du tableau vaut 2^{14}. Remplir les cases manquantes :

2^{11}	2^{-2}		2^8
2^0			2^3
		2^2	2^7
2^{-1}		2^{10}	

4.1.5 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2$ b) $(2^3)^{-5}$ c) $\dfrac{5^3}{5^{-2}}$

d) $((-1)^{-2})^{-3}$ e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1}$ f) $\left(\dfrac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5}$

g) $7^{-3} \cdot \dfrac{49}{7^8} \cdot 7$ h) $10'000 \cdot \dfrac{100}{100'000} \cdot 10^{-3}$ i) $\dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3}$

4.1.6 Simplifier les expressions suivantes et écrivez-les sans fraction :

a) $x^2yz^3 \cdot 3xy \cdot 27x^3z^5$ b) $(2a^2b^3c)^4$ c) $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{s}{r}\right)^3$ d) $\dfrac{(4x^2y^3)^5}{(2xy)^3} \div \dfrac{x^7}{(y^3)^4}$

e) $(u^{-2}v^3)^{-3}$ f) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ g) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{-2} \div \left(\dfrac{x}{9}\right)^{-3}$ h) $\left(\dfrac{9y^3(3y^2)^{-2}}{(y^{-4})^{-3}}\right)^5$

4.1.7 Calculer :

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{1'000}$ c) $\sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt[5]{32}$ e) $\sqrt[6]{729}$

f) $\sqrt[3]{0,027}$ g) $\sqrt[3]{0,125}$ h) $\sqrt[3]{0,015625}$ i) $\sqrt{0}$ j) $\sqrt[3]{0,000008}$

4.1.8 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{243}$ d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{300}$ f) $\sqrt{54}$

g) $\sqrt{125}$ h) $\sqrt{147}$ i) $\sqrt{80}$ j) $\sqrt{1'000}$ k) $\sqrt{250}$ l) $\sqrt{7'000}$

m) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$ n) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90} + \sqrt{4'000} - 5\sqrt{10}$

4.1.9 Effectuer et réduire :

a) $(9\sqrt{12}+3)(\sqrt{3}+8)$ b) $(4\sqrt{3}+\sqrt{45})(\sqrt{5}-2\sqrt{27})$

c) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ d) $(\sqrt{3}+1)^4$

4.1.10 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ b) $\sqrt[3]{2^{18}\cdot 5^{12}\cdot 3^3}$ c) $\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[4]{4}$ d) $\sqrt[5]{3^{15}}$ e) $(\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}})^{128}$

f) $\sqrt{3\sqrt{3}}$ g) $\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ h) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ i) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^4\sqrt[3]{3^6}}}$ j) $\sqrt[3]{2\sqrt[6]{\dfrac{2^{14}}{\sqrt[3]{2^6}}}}$

4.1.11 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a})^2$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot(\sqrt[3]{a})^2$ c) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a^2})^6$ d) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^4}$

e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[10]{a})^4$ f) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a}$ g) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ h) $(\sqrt[10]{\sqrt[5]{a}})^{15}$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$ j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$ k) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$ l) $\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a}}$

4.1.12 Rendre rationnel les dénominateurs et simplifier les expressions :

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

4.1.13 Écrire à l'aide d'exposants rationnels :

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[10]{7}$ c) $-\sqrt[8]{7^2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{8}{\sqrt[7]{4^3}}$ g) $\sqrt[4]{5}$ h) $\sqrt[7]{3^7}$

4.1.14 Écrire à l'aide de racines et d'exposants entiers positifs :

a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $3^{\frac{2}{5}}$ c) $64^{\frac{3}{2}}$ d) $-11^{0,25}$ e) $36^{-\frac{1}{2}}$ f) $8^{-\frac{7}{5}}$ g) $27^{-\frac{1}{3}}$ h) $(-3)^{0,5}$

4.1.15 Calculer sans l'aide de la machine :

a) $\sqrt[4]{16^3}$ b) $(5+16^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ c) $4\cdot 25^{\frac{3}{2}}$ d) $(4\cdot 25)^{\frac{3}{2}}$

e) $19-27^{\frac{1}{3}}$ f) $(19-27)^{\frac{1}{3}}$ g) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ h) $(32)^{-\frac{1}{5}}$

4.1.16 Calculer :

a) $8^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{1}{4}}-125^{\frac{1}{3}}-1'000^{\frac{2}{3}}$

b) $(3\cdot 32^{\frac{1}{3}}+3\cdot 108^{\frac{1}{3}}-256\cdot 2^{\frac{2}{3}})\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

c) $(3\cdot 2^{0,25}+2\cdot 32^{0,25}-8^{0,75})\cdot 8^{0,25}$

d) $\dfrac{16^{\frac{1}{3}}-4\cdot 128^{\frac{1}{3}}+3\cdot 250^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

4.1.17 Simplifier les expressions suivantes et écrivez-les sans fraction :

a) $u^{4/3}u^{-3/2}u^{1/6}$

b) $(a^{-2/3}b^{-1}c^2)^{-3/2}\cdot(a^{-1/2}b^{1/3}c)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{x^{-2/3}y^{3/4}}{x^{5/2}y^{2/3}}\right)^{1/5}\div\left(\dfrac{x^4y^{-2}}{x^{1/3}y^{-2/5}}\right)^{2/3}$

4.2 Exponentielles et logarithmes

4.2.1 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $7^{x+6}=7^{3x+4}$

b) $6^{7-x}=6^{2x+1}$

c) $3^{2x+3}=3^{(x^2)}$

d) $9^{(x^2)}=3^{3x+2}$

e) $2^{-100x}=0,5^{x-4}$

f) $(\dfrac{1}{4})^{6-x}=4$

g) $27^{x-1}=9^{2x-3}$

h) $2^x\cdot 4^x=-5$

i) $(5^{x-2})^4=125\cdot 5^{5x-3}$

j) $(3^{x-1})^3=9\cdot 3^{x-2}$

k) $3^{4x+2}-36\cdot 3^{2x+1}=-243$

l) $5\cdot 5^{4x-7}-120\cdot 5^{2x-3}=625$

4.2.2 Calculer à la main :

a) $\log_3(1)$ b) $\log_2(8)$ c) $\log_2(64)$ d) $\log_2(1'024)$

e) $\log_5(5)$ f) $\log_3(\sqrt{3})$ g) $\log_{243}(1/243)$ h) $\log_3(27)$

i) $\log(1'000)$ j) $\log_4(\sqrt{2})$ k) $\log_{1/8}(64)$ l) $\log_5(0,04)$

m) $\log_3(\sqrt[4]{27})$ n) $\ln(e^2)$ o) $\log_a(a)$ p) $\log_a(a^3)$

q) $\log(10000)$ r) $\ln(e)$ s) $\log_2(1/8)$ t) $\log_3(\sqrt[4]{3})$

u) $\log(200) - \log(2)$ v) $\log_6(4) + \log_6(9)$ w) $\log_5(1)$ x) $\log(-1)$

y) $\log(0.0001)$ z) $\ln(0)$

4.2.3 Sachant que $\log(2) = 0.3010$ et $\log(3) = 0.4771$, calculer sans la calculatrice :

a) $\log(6)$ b) $\log(16)$ c) $\log(\sqrt{2})$ d) $\log(0,5)$ e) $\log(36)$ f) $\log\left(\frac{8}{27}\right)$

4.2.4 Simplifier les expressions ci-dessous sans utiliser la machine :

a) $\log(16) + 2\log(3) - 2\log(2) - \frac{1}{2}\log(9)$ b) $\log(15) + 3\log(10) - \log(30) - \log(5)$

c) $4\log(5) + \log\left(\frac{1}{5}\right) - 3\log(3) + \frac{1}{3}\log(27)$ d) $\dfrac{\log(20) + \log(100) - \log(2)}{\log(5'000) - \log(5) + \log(0,1)}$

4.2.5 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $x = \log_2(32)$ b) $2^x = 100$ c) $\log_x(256) = 4$ d) $\log_2(x) = 4$

e) $10^x = 5$ f) $e^{2x-1} = 27$ g) $\log_x(1'000) = 3$ h) $12^x = -49$

4.2.6 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $\log_{11}(x+1) = \log_{11}(7)$ b) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6(3)$

c) $\log(x) - \log(x+1) = 3\log(4)$ d) $2\log_3(x) = 3\log_3(5)$

e) $\ln(x) + \ln(x-2) = 0,5\ln(9)$ f) $\log_8(x+4) = 1 - \log_8(x-3)$

4.2.7 Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} \log(x) + \log(y) &= 2 \\ x + y &= 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x) - \log(y) &= 1 \\ x\,y &= 2 \end{cases}$

4.2.8 Estimer graphiquement les solutions des équations suivantes :

a) $3^x = \dfrac{3}{2}\,(x+1)$

b) $x + \log_3(x) = 0$

4.2.9 Esquisser le graphe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x \cdot 2^x$

b) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

c) $f(x) = 2^{2/x}$

d) $f(x) = 2^{-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 1}$

f) $f(x) = x + 1.1^x$

g) $f(x) = x\ \log_2(x)$

h) $f(x) = \log_2(-x)$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

j) $f(x) = \log_2(x^2)$

4.2.10 Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2}{10^x - 9}$

b) $f(x) = \log_7\left(\dfrac{x^2-1}{x+3}\right)$

c) $f(x) = \log(x^3 + 2\,x^2 - 3)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x^2-1)}$

4.2.11 Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log(-x^2 + 4\,x + 22)$

b) $f(x) = 12 - 10^{3-x}$

c) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2\,x}{x-1}\right)$

4.2.12 Une étude a montré que l'indice de satisfaction (sur une échelle de 1 à 10) des clients abonnés à un service Internet était donné par la fonction s définie par

$$s(t) = \frac{20\ln(t+1) + t}{t+1} \qquad t \geq 1$$

où t représente le nombre de mois écoulés depuis le début de l'abonnement (cette fonction n'est valable qu'à partir de la fin du 1[er] mois).

a) Quel est l'indice de satisfaction après 5 mois d'abonnement (réponse à deux décimales) ?

b) Si l'abonnement est conclu le 1[er] janvier, au cours de quel mois l'indice de satisfaction est-il maximal ?

c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

4.2.13 Dans une école, une étude a montré que le degré d'intérêt (sur une échelle de 1 à 10) des élèves au cours d'une leçon de 45 minutes est donné par la fonction d définie par

$$d(t) = \frac{t \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 2}{2}$$

où t représente le nombre de minutes écoulées depuis le début de la leçon.

a) Quel est le degré de motivation des élèves en entrant en classe ?

b) Quel est le degré de motivation des élèves après 20 minutes en classe ?

c) Après combien de minutes le degré maximal est-il atteint ? Donner sa valeur maximale.

4.2.14 Le modèle de Jenss est généralement considéré comme la formule la plus précise pour prévoir la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si y est sa taille en cm et x son âge en années, on a $y = 79,041 + 6,39x - e^{3,261 - 0,993x}$. Quelle est, d'après ce modèle, la taille d'un enfant d'une année ?

4.2.15 La relation d'Ehrenberg $\ln(m) = \ln(2,4) + 1,84h$ est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

a) Évaluer, à l'aide de cette formule, la taille moyenne d'un enfant de 7 ans qui pèse $21,8$ kg.

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure $1,5$ m.

4.2.16 Dans l'étude de 15 villes ayant une population P allant de 300 à 3'000'000 d'habitants, on a déterminé que la vitesse moyenne v (en m/s) d'un piéton pouvait être donnée approximativement par $v = 0,0151 + 0,258 \log(P)$.

a) Selon ce modèle, quel est la vitesse moyenne d'un piéton à Lausanne ($\sim$ 130'000 habitants) ?

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, le nombre d'habitants nécessaire pour que la vitesse moyenne d'un piéton soit de $1,5$ m/s.

4.2.17 La masse m (en kilogrammes) d'une éléphante d'Afrique à l'âge de t (années) peut être donnée approximativement par $m = 2'600(1 - 0,51e^{-0,057t})^3$.

a) Donner approximativement sa masse à la naissance.

b) Évaluer l'âge d'une éléphante d'Afrique ayant une masse de $1,8$ tonnes.

4.2.18 Un pêcheur esquimau tombe dans l'eau dont la température est de 0°C . La relation $T = 37e^{-0,02\,t}$ donne la température T de son corps après t minutes.

a) Quelle sera la température de son corps après 45 minutes.

b) Calculer le temps dont disposent ses amis pour le secourir si l'on sait qu'il s'évanouira lorsque son corps sera à une température de 25°C.

4.2.19 La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

4.2.20 Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

4.2.21 Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient en avale une dose de 10 mg. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.

b) Donner approximativement la quantité du médicament dans le corps du patient 8 h après l'absorption.

c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps ?

4.2.22 On place un capital C à un taux d'intérêt annuel i pendant une durée de n années et on obtient le montant C_n. Remplir le tableau ci-dessous :

C	i	n	C_n
$4'720.-$	$3,5\%$	12 ans	
	$3,5\%$	24 ans	$5'388.65$
$9'440.-$	$3,5\%$		$11'604.17$
$790.-$		72 ans	$9'404.43$

4.2.23 En 1867, les USA ont acheté l'Alaska à la Russie pour la somme de \$ $7'200'000$. En supposant que la valeur du terrain augmente régulièrement de 3% par an, quelle aurait été sa valeur en l'an 2'000 ?

4.2.24 CHF 10'000.- sont déposés sur un compte d'épargne à un taux d'intérêts composés de 11% par an. Combien faudra-t-il d'années au minimum pour que la somme double ?

4.2.25 Le taux de dépréciation annuel d'une voiture de valeur initiale CHF 18'000.- est de 25%.

a) Trouver la valeur v de cette voiture après t années.

b) Calculer la valeur de la voiture après 8 ans.

c) Calculer la valeur de la voiture lorsque t devient très grand.

4.2.26 Nous avons au départ 50mg de l'isotope Po^{210}. Après 30 jours, il n'en reste plus que 43mg.

a) Déterminer la quantité de matière restante Q après t jours.

b) Combien restera-t-il de matière après 3 semaines.

c) Quelle est la demi-vie de cet isotope.

4.2.27 Le césium est une matière radioactive dont la demi-vie est égale à environ 30 ans. On dispose de 100 tonnes de cette substance.

a) Déterminer la quantité de substance restante Q après t années.

b) Combien restera-t-il de cette substance après 5 ans.

4.2.28 Les grottes de Lascaux ont été découvertes en 1940. Des analyses ont montré que le charbon trouvé dans ces grottes avait perdu le 83% de la quantité de C^{14} présent dans les plantes vivantes. Déterminer l'âge des peintures de Lascaux.

4.2.29 La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique. Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h = \frac{40}{1 + 200\, e^{-0,2t}}$$

a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

4.2.30 La grippe se propage à partir d'un individu malade dans une population de 1'000 personnes. On admet que le nombre de personnes qui sont ou ont été atteintes par la grippe après t jours est $N = \dfrac{1'000}{1 + 999 \cdot 10^{-0,17t}}$.

a) Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?

b) Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?

c) Quel est le maximum de personnes qui peuvent être atteintes par la grippe ?

4.2.31 En 1980, la population des USA était d'environ 227'000'000 habitants et en 1990 d'environ 248'710'000 habitants. Des sociologues prédisent que la population des USA se rapprochera de 500 millions, mais ne dépassera jamais cette valeur.

a) A l'aide du modèle logistique, donner la population N des USA t années après 1980.

b) Quelle fut la population de ce pays en l'an 2000 ?

4.2.32 Les démographes utilisent principalement quatre modèles de croissance de la population mondiale. Pour chacun d'eux, la population initiale est de 4 milliards en 1976 ($t = 0$) et le taux relatif de croissance instantanée de 2% par année :

- croissance illimitée : $P_1 = 4e^{0,02t}$ (en milliards)
- croissance limitée : $P_2 = 20 - 16e^{-0,005t}$ (en milliards)
- modèle de Verhulst : $P_3 = \dfrac{20}{1 + 4e^{-0,025t}}$(en milliards)
- modèle de Gompertz : $P_4 = 20(0,2)^{0,9877^t}$ (en milliards)

Pour chacun des modèles,

a) calculer la croissance de la population mondiale lorsque $t = 0$, $t = 1$ et $t = 10$.

b) au bout de combien d'années la population mondiale atteindra 5 milliards d'individus ?

c) calculer la croissance de la population mondiale lorsque t devient très grand.

d) tracer la courbe représentative de chacun des modèles pour $t \geq 0$ et comparer les prédictions de ces quatre modèles.

4.2.33 Un séisme a été enregistré par un sismographe à 220 km de son épicentre. Calculer son amplitude si sa magnitude était de 5 sur l'échelle de Richter.

4.3 Solutions des exercices

4.1.1 a) 6^4 ; b) $(-24)^3$; c) 15^6 ; d) 5^{55} ; e) 15^5 ; f) 5^2 ; g) $\dfrac{1}{5^2}$; h) $-\dfrac{2^5}{3^5}$; i) 1.

4.1.2 a) 2^6 ; b) 2^8 ; c) 2^{16} ; d) $\dfrac{1}{3^{18}}$; e) $\dfrac{2^8}{3^6}$; f) $\dfrac{2^3}{5^3}$; g) 2^{15} ; h) $\dfrac{2^4}{3^4}$; i) 1.

4.1.3 a) $\dfrac{1}{16}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{27}$; d) 4 ; e) 4 ; f) $\dfrac{27}{8}$.

4.1.4

2^{11}	2^{-2}	2^{-3}	2^8
2^0	2^6	2^5	2^3
2^4	2	2^2	2^7
2^{-1}	2^9	2^{10}	2^{-4}

4.1.5 a) 2^3 ; b) 2^{-15} ; c) 5^5 ; d) 1 ; e) 10 ; f) 11^{50} ; g) 7^{-8} ; h) 10^{-2} ; i) 10^8.

4.1.6 a) $3^4x^6y^2z^8$; b) $2^4a^8b^{12}c^4$; c) 2^2r^3s ; d) 2^7y^{24} ; e) u^6v^{-9} ; f) $2x^4y^{-7}$; g) $3^{-4}x$; h) y^{-65}.

4.1.7 a) 5 ; b) 10 ; c) 5 ; d) 2 ; e) 3 ; f) $0,3$; g) $0,5$; h) $0,25$; i) 0 ; j) 0,02.

4.1.8 a) $2\sqrt{6}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $9\sqrt{3}$; d) $5\sqrt{2}$; e) $10\sqrt{3}$; f) $3\sqrt{6}$; g) $5\sqrt{5}$; h) $7\sqrt{3}$; i) $4\sqrt{5}$; j) $10\sqrt{10}$; k) $5\sqrt{10}$; l) $10\sqrt{70}$; m) $-2\sqrt{5}$; n) $13\sqrt{10}$.

4.1.9 a) $147\sqrt{3}+78$; b) $-14\sqrt{15}-57$; c) 1 ; d) $16\sqrt{3}+28$.

4.1.10 a) $\sqrt[6]{7}$; b) $120'000$; c) 4 ; d) 27 ; e) 4 ; f) $\sqrt[4]{27}$; g) $\sqrt[12]{78'125}$; h) $\sqrt[3]{4}$; i) 3 ; j) 2 .

4.1.11 a) a ; b) a ; c) a^3 ; d) $\sqrt[12]{a^{25}}$; e) $\sqrt{a^3}$; f) $\sqrt[4]{a^5}$; g) $\sqrt[6]{a}$; h) $\sqrt[10]{a^3}$; i) $\sqrt[6]{a^5}$; j) $\sqrt[12]{a}$; k) $\sqrt[12]{a}$; l) $\sqrt[6]{a^7}$.

4.1.12 a) $\sqrt{2}/2$; b) $\dfrac{2\sqrt[4]{125}}{5}$; c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; d) $2-\sqrt{3}$; e) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; f) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$.

4.1.13 a) $5^{2/3}$; b) $7^{1/10}$; c) $-7^{1/4}$; d) $2^{1/2}$; e) $3^{-1/2}$; f) $2^{15/7}$; g) $5^{1/4}$; h) 3.

4.1.14 a) $\sqrt{7^3}$; b) $\sqrt[5]{3^2}$; c) $\sqrt{64^3}$; d) $-\sqrt[4]{11}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{36}}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8^7}}$; g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$; h) -.

4.1.15 a) 8 ; b) 3 ; c) 500 ; d) 1000 ; e) 16 ; f) -2 ; g) -2 ; h) $\frac{1}{2}$.

4.1.16 a) -85 ; b) -482 ; c) 6 ; d) 1.

4.1.17 a) 1 si $u\neq 0$; b) $a^2b^{5/6}c^{-5}$; c) $x^{-277/90}y^{13/12}$.

4.2.1 a) $S=\{1\}$; b) $S=\{2\}$; c) $S=\{-1;3\}$; d) $S=\{-\dfrac{1}{2};2\}$; e) $S=\{-\dfrac{4}{99}\}$; f) $S=\{7\}$; g) $S=\{3\}$; h) $S=\emptyset$; i) $S=\{-8\}$; j) $S=\{\dfrac{3}{2}\}$; k) $S=\{\dfrac{1}{2};1\}$; l) $S=\{3\}$.

4.2.2 a) 0 ; b) 3 ; c) 6 ; d) 10 ; e) 1 ; f) $1/2$; g) -1 ; h) 3 ; i) 3 ; j) $1/4$; k) -2 ; l) -2 ; m) $3/4$; n) 2 ; o) 1 ; p) 3 ; q) 4 ; r) 1 ; s) -3 ; t) $1/4$; u) 2 ; v) 2 ; w) 0 ; x) non défini ; y) -4 ; z) non défini.

4.2.3 a) $0,7781$; b) $1,204$; c) $0,1505$; d) $-0,3010$; e) $1,5562$; f) $-0,5283$.

4.2.4 a) $2\log(2) + \log(3)$; b) 2 ; c) $3\log(5) - 2\log(3)$; d) $\dfrac{3}{2}$.

4.2.5 a) $S = \{5\}$; b) $S = \{\log_2(100)\}$; c) $S = \{4\}$; d) $S = \{16\}$; e) $S = \{\log_{10}(5)\}$; f) $S = \{\dfrac{\ln(27)+1}{2}\}$; g) $S = \{10\}$; h) $S = \emptyset$.

4.2.6 a) $S = \{6\}$; b) $S = \{\dfrac{7}{2}\}$; c) $S = \emptyset$; d) $S = \{11, 18\}$; e) $S = \{3\}$; f) $S = \{4\}$.

4.2.7

a) $(x; y) = (20; 5); (x; y) = (5; 20)$

b) $(x; y) = (2\sqrt{5}; 1/\sqrt{5})$

4.2.8

a) 1 ; -0.7 environ

b) 0.5 environ

4.2.9 –

4.2.10 –

4.2.11 –

4.2.12 –

4.2.13 –

4.2.14 Selon ce modèle, la taille d'un enfant d'une année est d'environ $75,77$ cm.

4.2.15 a) Il mesure environ $1,2$ m ; b) il pèse environ $37,9$ kg.

4.2.16 a) La vitesse moyenne est de $1,3$ m/s ; b) la population doit être d'environ $569'411$ habitants.

4.2.17 a) A la naissance, elle pèse environ 305.9 kg ; b) 26 ans.

4.2.18 a) Elle sera de 15.043 °C ; b) il faut le secourir avant environ 19.6 min.

4.2.19 a) $N = 10'000 \cdot 2^{t/12}$; b) après une semaine, il y aura $1,6384 \cdot 10^8$ bactéries ; c) le nombre de bactéries aura triplé après environ 19 h.

4.2.20 a) $Q = 1'000 \cdot 0,6^{t/3}$; b) après une année, il y aura environ 129 truites ; c) il n'y aura plus que 80 truites après environ 14,8 mois.

4.2.21 a) $N = 10 \cdot 0,8^t$; b) après 8h, il reste environ 1.68 mg de médicament dans le corps ;
c) il faut attendre 10h, 19min et 8s pour qu'il ne reste plus que 1 mg de médicament dans le corps du patient.

4.2.22

C	i	n	C_n
$4'720.-$	$3,5\%$	12 ans	$7'132.25$
$2'360.-$	$3,5\%$	24 ans	$5'388.65$
$9'440.-$	$3,5\%$	6 ans	$11'604.17$
$790.-$	$3,5\%$	72 ans	$9'404.43$

4.2.23 Le capital aurait valu environ $367'014'635$\$.

4.2.24 7 ans.

4.2.25 a) $v = 18'000(1-25\%)^t$; b) après 8 ans, la voiture ne vaut plus que CHF $1'802.-$; c) lorsque t est grand, la voiture ne vaut plus rien.

4.2.26 a) $Q = 50 \cdot e^{-0.0050274 \cdot t}$; b) après trois semaines, il ne restera plus qu'environ 45 mg de matière ; c) la demi-vie est d'environ de 138 jours.

4.2.27 a) $Q = 100 \cdot e^{-0.023105 \cdot t}$; b) après 5 ans il restera 89 tonnes de substance.

4.2.28 Les grottes de Lascaux datent d'environ 12'708 av. J.C.

4.2.29 a) Un arbre de 30 ans mesure environ 26.74 m ; b) après 24 ans et demi, l'arbre mesurera 16 m ; c) la hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40 m.

4.2.30 a) Après 20 jours, environ 715 personnes seront atteintes ; b) 600 personnes seront atteintes après environ 19 jours ; c) lorsque t sera très grand, l'entier de la population, à savoir $1'000$ personnes, seront atteintes.

4.2.31 a) $N = \dfrac{1.135 \cdot 10^{17}}{2.27 \cdot 10^8 + 2.73 \cdot 10^8 \cdot e^{-0.017t}}$; b) selon ce modèle, la population américaine en l'an 2000 valait environ 270'439'855 habitants.

4.2.32 a) $P_1(0) = 4$, $P_1(1) \cong 4.08$, $P_1(10) \cong 4.89$, $P_2(0) = 4$, $P_2(1) \cong 4.08$, $P_2(10) \cong 4.78$, $P_3(0) = 4$, $P_3(1) \cong 4.08$, $P_3(10) \cong 4.86$, $P_4(0) = 4$, $P_4(1) \cong 4.08$, $P_4(10) \cong 4.82$;
b) P_1 : 11 ans, P_2 : 13 ans, P_3 : 11 ans et demi, P_4 : 12 ans ; c) P_1 tend vers l'infini, P_2 tend vers 20, P_3 tend vers 20, P_4 tend vers 20 ; d) -.

4.2.33 L'amplitude est d'environ 25 μm.