Nombres réels

Exercice 1

Soit a, b deux nombres réels.

a) Montrer que $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$.

b) Supposons de plus que a et b ont même signe. Montrer que

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

c) Montrer que

$$(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

et en déduire que

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

pour a et b des nombres réels quelconques.

d) Soit encore c et d deux nombres réels. Montrer que

$$|a-b| \leq |a-c| + |c-d| + |d-b|$$

Exercice 2

Écrire la définition de *la borne inférieure* ou *infimum*.

Exercice 3

Montrer que si a est un majorant de A et que a est aussi un élément de A, alors il faut que $a = \sup A$.

Exercice 4

Donner sans démonstration le supremum et l'infimum des ensembles suivants :

a) $\{m/n \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ avec } m < n\}$

b) $\{(-1)^m/n \mid m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

c) $\{n/(3\,n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

d) $\{m/(m+n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m+n \neq 0\}$

Exercice 5

Soit x un nombre réel. Montrer que si, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$|x| < \epsilon$$

alors $x = 0$.

Exercice 6

Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il est majoré, minoré, borné dans $\mathbb{R}$. Donner, s'ils existent, l'élément maximal, la borne supérieure, l'élément minimal et la borne inférieure.

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 2\}$

b) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$

c) $\{1/(1-x^2) \mid x \in [0,1[\}$

d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 17\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$

f) $\{1/(1+x^2) \mid x \in]0,1[\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 17\}$