2.9.10

j) $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$

① $ED(f) = \mathbb{R}$

② parité : $f(-x) = \sin^2(-x) - 2\cos(-x)$

$= (\sin(-x))^2 - 2\cos(x)$

$= (-\sin(x))^2 - 2\cos(x)$

$= \sin^2(x) - 2\cos(x) = f(x)$

f est paire

Cherchons une période de f :

$f(x + 2\pi) = f(x)$ $\quad p = 2\pi$ est une période de f

Étudions la fonction dans $[0 ; 2\pi[$

③ <u>Signe de $f(x)$</u>.

Cherchons les zéros de $f(x)$:

$$\sin^2(x) - 2\cos(x) = 0$$
$$1 - \cos^2(x) - 2\cos(x) = 0$$
$$\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1 = 0$$

posons $t = \cos(x)$ $\quad t \in [-1;1]$

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} t = -1+\sqrt{2} \Rightarrow \cos(x) = -1+\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x \cong 1{,}14372 + 2k\pi \\ x = -1{,}14372 + 2k\pi \end{cases} \\ t = -1-\sqrt{2} \Rightarrow \cos(x) = -1-\sqrt{2} < -1 \text{ impossible} \end{cases}$$

Le signe de $f(x)$

x		0		1,14		5,14		2π
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

période

$$f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$$

④ Croissance

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x) = 2\sin(x)\cdot(\cos(x)+1)$$

$$\begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Zéros de $f'(x)$: 0 , π , 2π

x		0		π		2π	
$f'(x)$		0	$+$	0	$-$	0	
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

min $(0;-2)$

max $(\pi;2)$

période

⑤ $f'(x) = 2\sin(x)\cdot(\cos(x)+1)$

$$f''(x) = 2\cos(x)(\cos(x)+1) + 2\sin(x)\cdot(-\sin(x))$$
$$= 2\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2\sin^2(x)$$
$$= 2\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2(1-\cos^2(x))$$
$$= 2\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2 + 2\cos^2(x)$$
$$= 4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2$$

Cherchons les zéros de $f''(x)$: posons $t = \cos(x)$

$-1 \leq t \leq 1$

$$4t^2 + 2t - 2 = 0$$
$$2t^2 + t - 1 = 0$$
$$(2t-1)(t+1) = 0$$

$\begin{cases} 2t = 1 \\ \text{ou} \\ t = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 1/2 \\ \text{ou} \\ t = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(x) = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(x) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \\ \text{ou} \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$

Dans $[0;2\pi[$: $\frac{\pi}{3}$, π ; $\frac{5\pi}{3}$

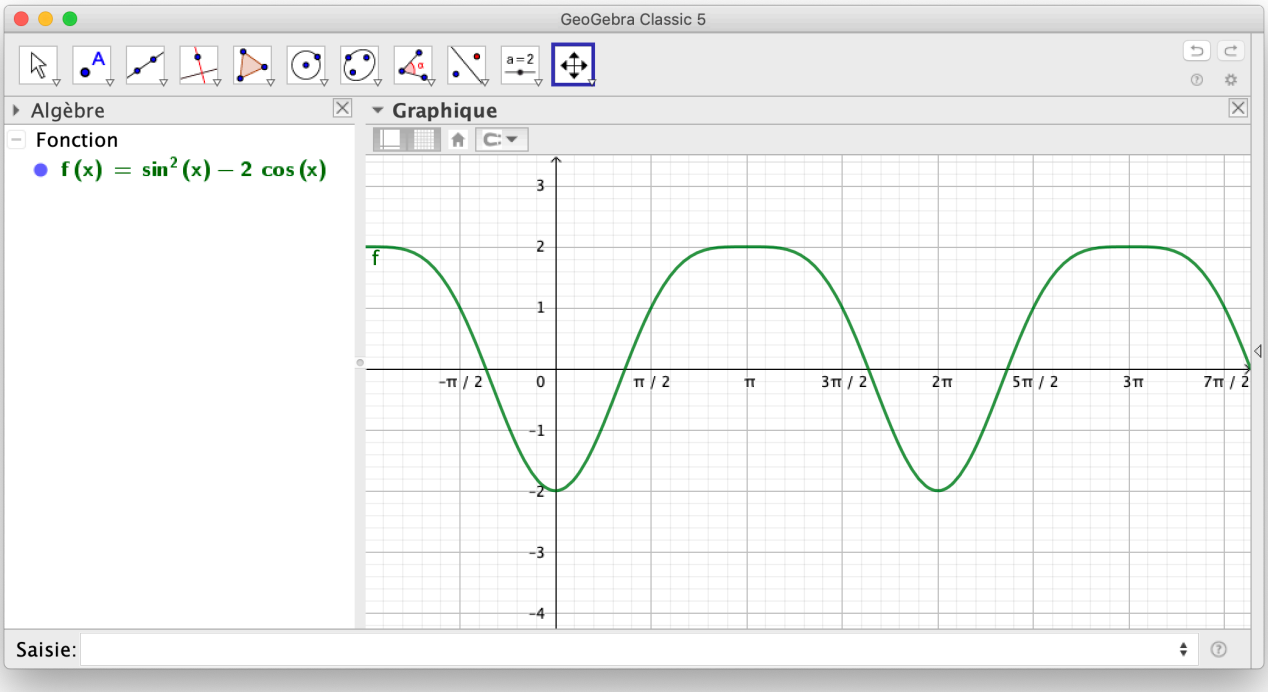
Tableau de la courbure

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f''(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		convexe	pi		concave		pi	convexe	

En π, la courbe "s'aplatit beaucoup"!

La courbe est presque droite au voisinage de π.

pi $\left(\frac{\pi}{3} ; -\frac{1}{4}\right)$ $\left(\frac{5\pi}{3} ; -\frac{1}{4}\right)$


GeoGebra Classic 5
Algèbre
Graphique
Fonction
f(x) = sin²(x) − 2 cos(x)
f
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-π / 2
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2
3π
7π / 2
Saisie: