

**Analyse 4 – TE n° 704****Problème 1 (4 points)**Calculer  $f'(x)$  à partir de la définition de la dérivée, si :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x_0^2 - 1}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x_0^2 - 1) - (x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x_0^2 - 1)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 - x^2}{(x^2 - 1)(x_0^2 - 1)(x - x_0)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1 \cancel{(x_0 - x)(x_0 + x)}}{(x^2 - 1)(x_0^2 - 1) \cancel{(x - x_0)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1(x_0 + x)}{(x^2 - 1)(x_0^2 - 1)} \\
 &= \frac{-2x_0}{(x_0^2 - 1)^2} \\
 \Rightarrow f'(x) &= \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

---

**Problème 2** (4 points)

Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = (2x^2 + x + 7)^4 \cdot (-2x + 3)^5$$

Ne pas oublier de réduire la dérivée.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(2x^3 + x + 7)^3 \cdot (4x+1)(-2x+3)^5 \\ &\quad + (2x^2 + x + 7)^4 \cdot 5(-2x+3)^4 \cdot (-2) \\ &= 2(2x^2 + x + 7)^3 (-2x+3)^4 \left[ 2(4x+1)(-2x+3) - 5(2x^3 + x + 7) \right] \\ &= 2(2x^2 + x + 7)^3 (-2x+3)^4 \left[ -16x^2 + 20x + 6 - 10x^3 - 5x - 35 \right] \\ &= 2(2x^2 + x + 7)^3 (-2x+3)^4 (-26x^2 + 15x - 29) \end{aligned}$$

---

**Problème 3 (4 points)**

Calculer la dérivé de la fonction

$$f(x) = \frac{(4x^2 - 1)^2}{(4x^2 + 1)^3}$$

Ne pas oublier de réduire la dérivée.

$$\begin{aligned} u &= (4x^2 - 1)^2 & u' &= 2 \cdot (4x^2 - 1) \cdot 8x = 16x(4x^2 - 1) \\ v &= (4x^2 + 1)^3 & v' &= 3(4x^2 + 1)^2 \cdot 8x = 24x(4x^2 + 1)^2 \\ f'(x) &= \frac{16x(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)^3 - (4x^2 - 1)^2 \cdot 24x(4x^2 + 1)^2}{(4x^2 + 1)^6} \\ &= \frac{8x(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)^2 [2(4x^2 + 1) - 3(4x^2 - 1)]}{(4x^2 + 1)^6} \\ &= \frac{8x(4x^2 - 1)(-4x^2 + 5)}{(4x^2 + 1)^4} \end{aligned}$$

---

**Problème 4 (6 points)**

Calculer la dérivée des fonctions

a)  $f(x) = \tan(\sin(2x))$

b)  $g(x) = \sqrt{\cos^3(x) - 1} + \frac{1+2\pi}{\pi}$

$$\begin{aligned} a) f'(x) &= \left(1 + \tan^2(\sin(2x))\right) \cdot \cos(2x) \cdot 2 \\ &= 2 \cos(2x) \left(1 + \tan^2(\sin(2x))\right) \end{aligned}$$

$$b) (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\begin{aligned} u &= \cos^3(x) - 1 & u' &= 3\cos^2(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &&&= -3\sin(x)\cos^2(x) \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{-3\sin(x)\cos^2(x)}{2\sqrt{\cos^3(x) - 1}}$$