

Problème 1

Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous. Simplifier et factoriser au maximum les réponses. Donner en outre le résultat de la question e) sous forme de racine.

08.04.20

TE n° 745

a) $f(x) = x^5 \cdot (x^2 - 1)^3$

c) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - x}$

b) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

d) $f(x) = \sin^4(3x^3)$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f'(x) &= 5x^4(x^2-1)^3 + x^5 \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x \\ &= x^4(x^2-1)^2 [5(x^2-1) + 6x^2] = x^4(x^2-1)^2(11x^2-5) \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f'(x) &= \left(x(x^2-x)^{\frac{1}{2}} \right)' = (x^2-x)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(x^2-x)^{-\frac{1}{2}}(2x-1) \\ &= \sqrt{x^2-x} + \frac{x(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{2(x^2-x) + 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2-x}} \\ &= \frac{4x^2 - 3x}{2\sqrt{x^2-x}} \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad f'(x) = 4\sin^3(3x^3) \cdot \cos(3x^3) \cdot 9x^2 = 36x^2 \cdot \sin^3(3x^3) \cdot \cos(3x^3)$$

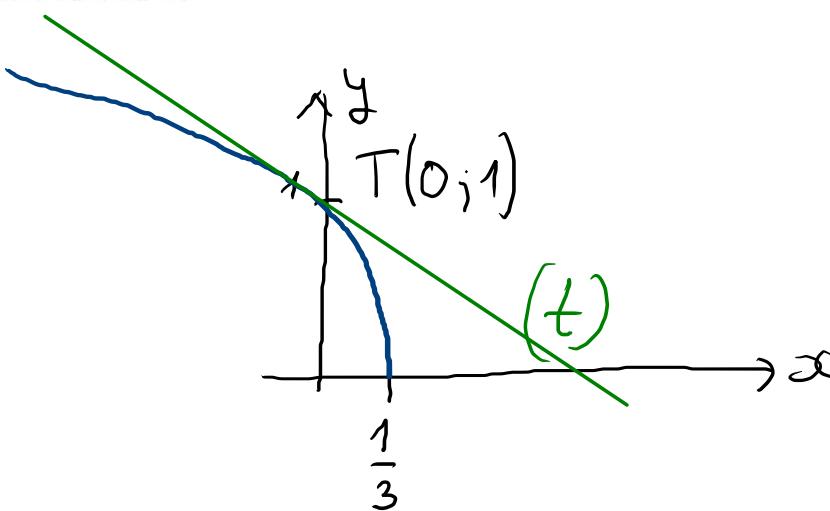
Problème 2

Soit $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$.

Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point T qui se trouve sur la courbe et dont l'abscisse vaut 0.

Calculer également la deuxième coordonnée du point T .

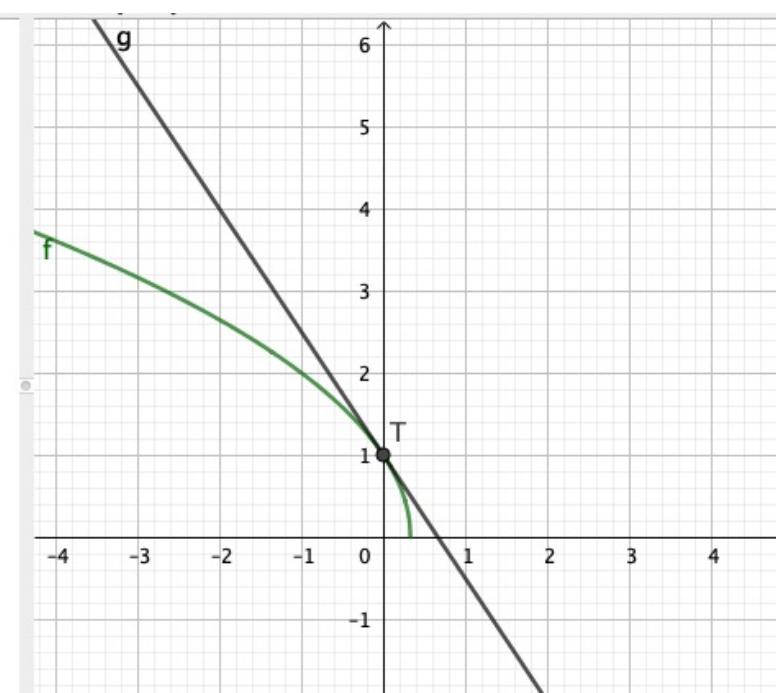
$$ED(f) = [-\infty; \frac{1}{3}]$$



$f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$; $f'(0) = -\frac{3}{2}$ est la pente de la tangente à la courbe au point T .

(t) : $y = -\frac{3}{2}x + 1$

- $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$
- $T = (0, 1)$
- $g: y = -1.5x + 1$



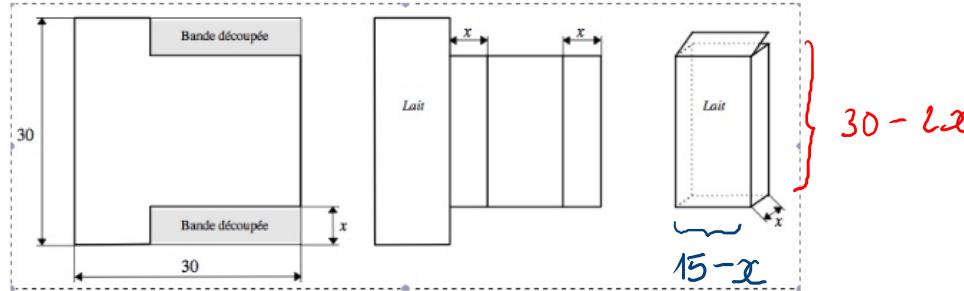
Problème 3

Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.

Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

a) Déterminer les dimensions de la brique qui a un volume maximal.

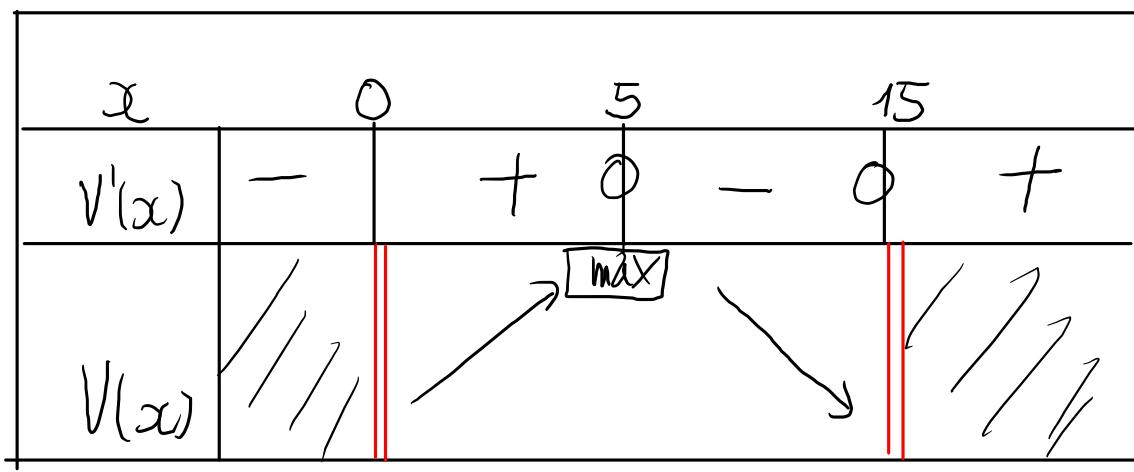
b) Calculer ce volume.



$$\text{a)} V(x) = x(15-x)(30-x) = 2x(15-x)^2 = 2x^3 - 60x^2 + 450x \quad 0 < x < 15$$

$$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450 = 6(x^2 - 20x + 75) = 6(x-5)(x-15)$$

Tableau des variations de $V(x)$:



Le max est atteint lorsque $x = 5$

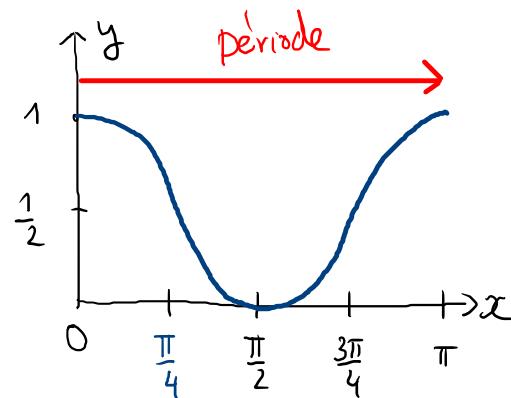
Les dimensions sont

$$5 \times 10 \times 20 \text{ [cm]}$$

$$\text{b)} \text{ Le volume est égal à } 5 \cdot 10 \cdot 20 = 1000 \text{ [cm}^3\text{]} = 1 \text{ [dm}^3\text{]} = 1 \text{ [l]}$$

Problème 4

Étudier la courbure de la fonction $f(x) = \cos^2(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Donner les coordonnées des points d'inflexion.



x	$f(x)$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
π	1

$$f'(x) = -2 \cos(x) \sin(x) \stackrel{\text{CRM}}{=} -\sin(2x) \quad \text{sur } [0, \pi]$$

$$f''(x) = -2 \cos(2x)$$

zéros de $f''(x)$: $\cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{[T130]} \quad 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$K=0 : \frac{\pi}{4}$$

$$K=1 : \frac{3\pi}{4}$$

Tableau de la courbure :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f''(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	concave	pu	convexe	concave

periode

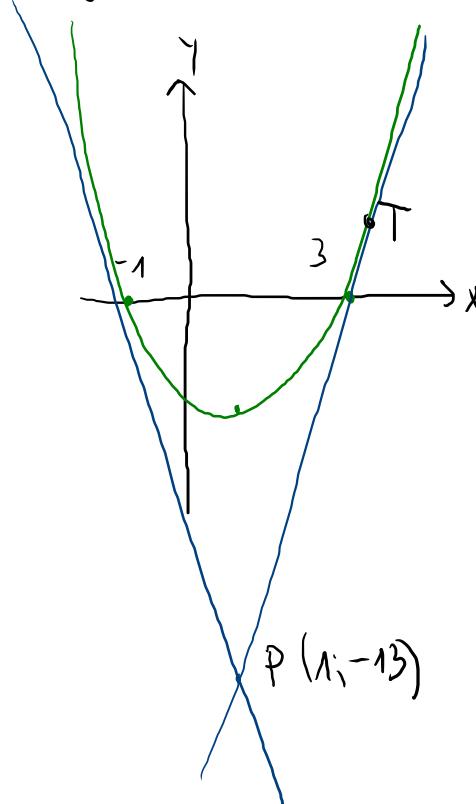
Problème 5

Soit f la fonction donnée par l'expression

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Calculer toutes les tangentes au graphe de f passant par le point $P(1; -13)$.

$$f(x) = (x-3)(x+1), \text{ axe de symétrie } x=1, f'(x) = 2x-2$$



- Soit T le point de contact : $T(\alpha, \alpha^2 - 2\alpha - 3)$
- La pente de la tangente au point T : $f'(\alpha) = 2\alpha - 2$
- La tangente s'écrit $y = f'(\alpha)x + h$
 - elle passe par P : $-13 = (2\alpha - 2) \cdot 1 + h \Leftrightarrow -13 = 2\alpha - 2 + h$
 $\Leftrightarrow h = -2\alpha - 11$
 - elle passe par T : $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = (\alpha - 2)\alpha - 2\alpha - 11$
 $\underline{\alpha^2} - \underline{2\alpha} - 3 = \underline{2\alpha^2} - \underline{2\alpha} - 2\alpha - 11$
 $\alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$
 $(\alpha - 4)(\alpha + 2) = 0$

①	$\alpha = -2$:	$y = -6x - 7$
②	$\alpha = 4$:	$y = 6x - 19$

sont les deux tangentes cherchées.