

Exercice 4

Donner sans démonstration le supremum et l'infimum des ensembles suivants :

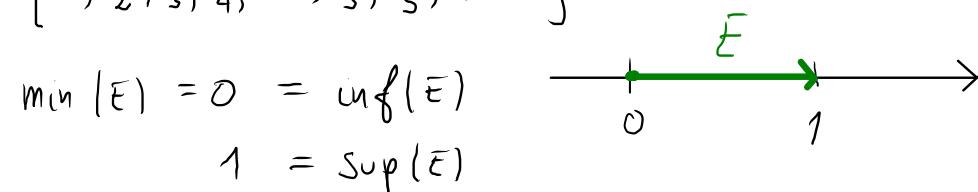
a) $\{m/n \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ avec } m < n\} = E$

b) $\{(-1)^m/n \mid m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

c) $\{n/(3n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

d) $\{m/(m+n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m+n \neq 0\}$

a) $E = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \dots \right\}$



b) $\{(-1)^m/n \mid m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} = E$

$$E = \left\{ \frac{\pm 1}{1}, \frac{\pm 1}{2}, \frac{\pm 1}{3}, \dots \right\}$$

$\min(E) = -1 = \inf(E)$

$\max(E) = 1 = \sup(E)$

c) $E = \left\{ \frac{n}{3n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \dots \right\}$

$\min(E) = 0 = \inf(E)$

~~$\max(E)$~~ $\frac{1}{3} = \sup(E)$

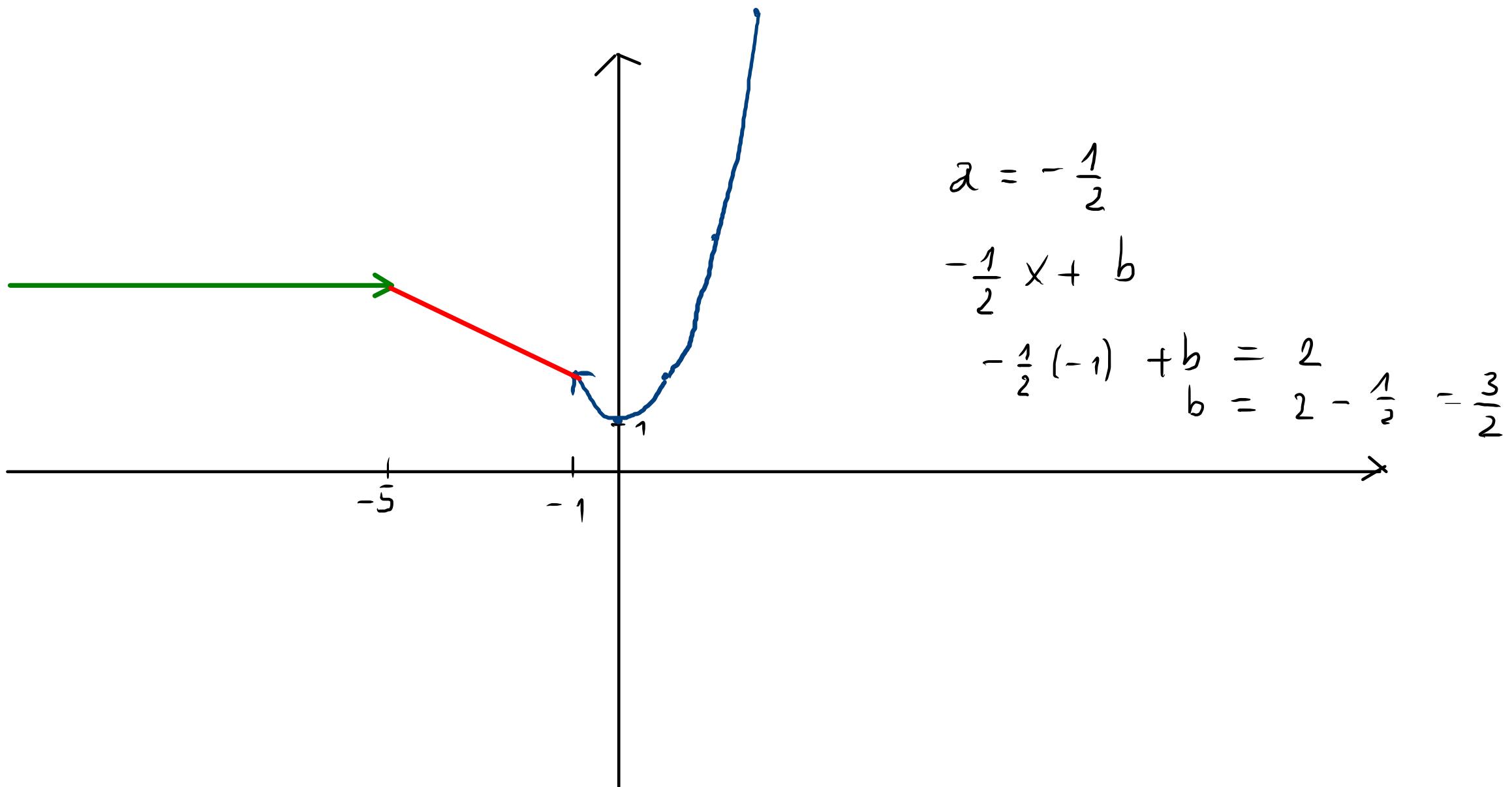
$$\frac{n}{3n+1} = \frac{\cancel{n}^1}{\cancel{n}(3+\frac{1}{n})} = \frac{1}{3+\frac{1}{n}} < \frac{1}{3}$$

d) $E = \left\{ \frac{m}{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m+n \neq 0 \right\}$

$E \not\subseteq [0; 1]$

2.2.18 Quelles valeurs doit-on attribuer à a et à b pour que le graphe de f puisse être tracé « sans lever le crayon » ?

$$f(x) = \begin{cases} 4 & , \text{ si } x < -5 \\ ax + b & , \text{ si } -5 \leq x \leq -1 \\ x^2 + 1 & , \text{ si } x > -1 \end{cases}$$



Fonctions paires , impaires

- f est paire si $\forall x \in ED(f)$, on a

$$\textcircled{1} \quad -x \in ED(f)$$

$$\textcircled{2} \quad f(-x) = f(x)$$

- f est impaire si $\forall x \in ED(f)$, on a

$$\textcircled{1} \quad -x \in ED(f)$$

$$\textcircled{2} \quad f(-x) = -f(x)$$

2.2.19 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre :

a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 2x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x^2 + 8x + 2$

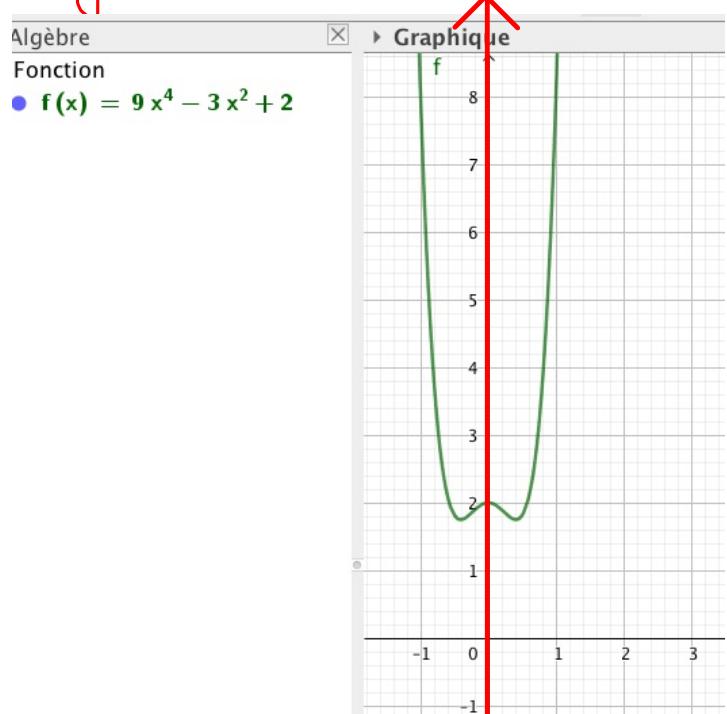
a) $ED(f) = \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 144 - 12 + 2 = 134 \\ f(-2) = 144 - 12 + 2 = 134 \end{array} \right\} f(2) = f(-2)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 9(-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 \\ &= 9x^4 - 3x^2 + 2 = f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f \text{ est paire}$$

Le graphique de f est symétrique par rapport
à l'axe Oy .



b) $f(x) = x^3 - 2x$ $ED(f) = \mathbb{R}$

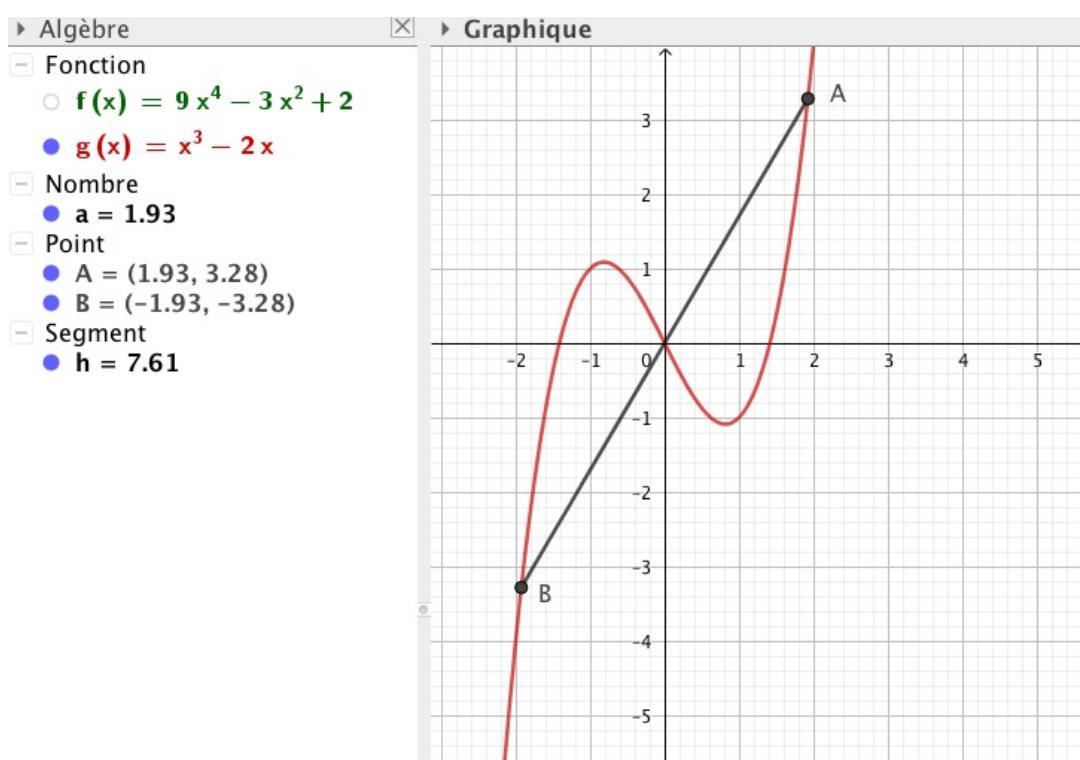
$$f(2) = 8 - 4 = 4$$

$$f(-2) = -8 + 4 = -4$$

$$f(-2) = -f(2)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -\underbrace{(x^3 - 2x)}_{f(x)} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

f est impaire



Le graphique de f est symétrique par rapport à l'origine

$$\text{n)} \quad f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x) = \left(\sin(x)\right)^2 \cos(x)$$

$$\begin{aligned}f(-x) &= \left(\sin(-x)\right)^2 \cos(-x) \\&= (-\sin(x))^2 \cos(x) \\&= \sin^2(x) \cos(x) = f(x)\end{aligned}$$

2.2.20 Quelle est la parité des fonctions $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ et $g \circ f$ si :

- a) f et g sont deux fonctions paires ?
- b) f et g sont deux fonctions impaires ?
- c) f est une fonction paire et g une fonction impaire ?

b)
$$\begin{aligned} (f \cdot g)(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) \\ &= (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) \\ &= (fg)(x) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} (f + g)(-x) &= f(x) - g(x) \\ f \circ g(-x) &= f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) \\ &= f \circ g(x) \end{aligned}$$

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$