

03.06.20

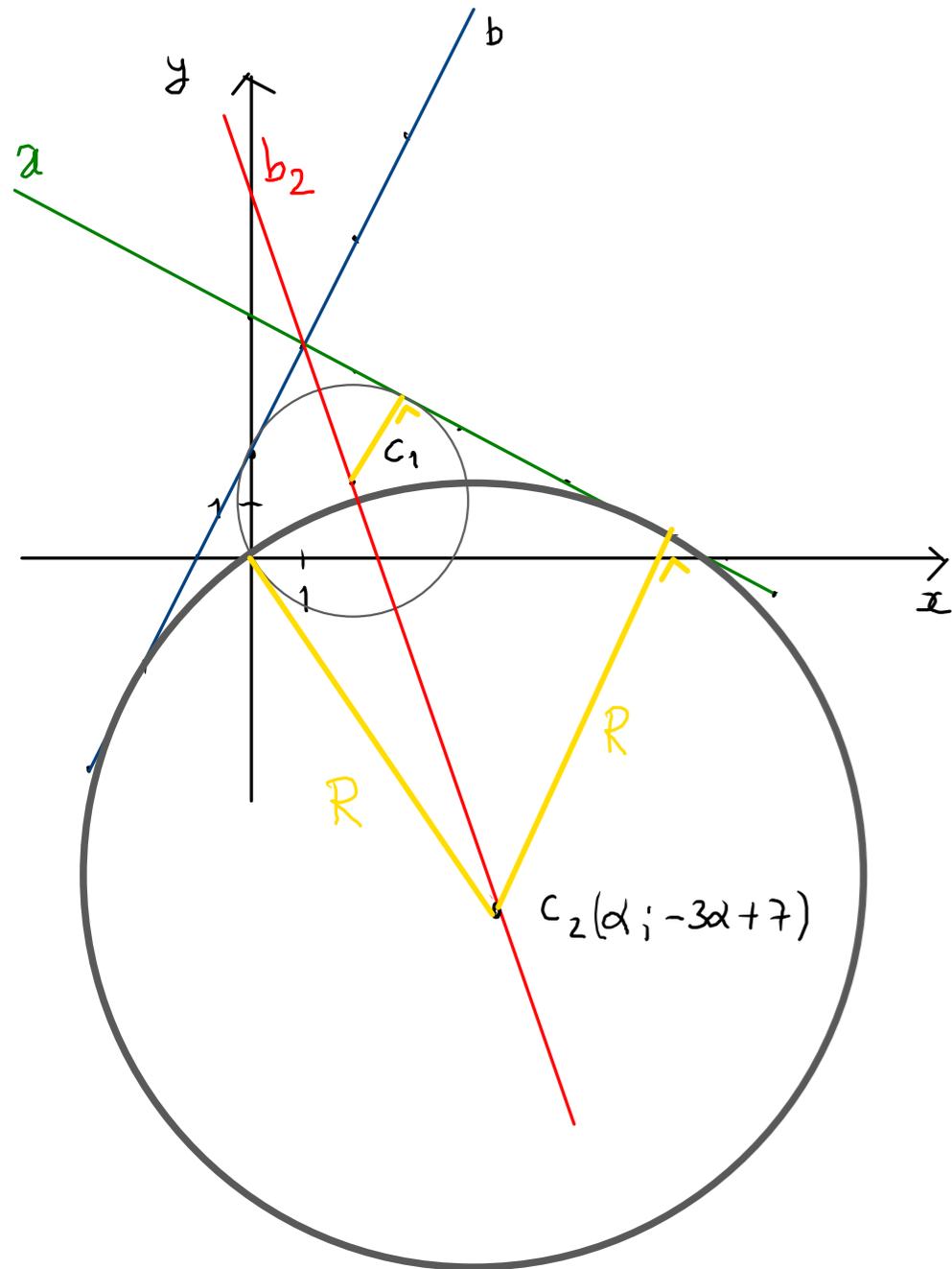
3.3.13 Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites  $x + 2y = 9$  et  $y = 2x + 2$ .

$$(a) : x + 2y - 9 = 0$$

$$(b) : 2x - y + 2 = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$y = 2x + 2$$



Le dessin montre qu'il y a deux cercles tangents aux droites  $a$  et  $b$  passant par l'origine.

① Il faut déterminer la bissectrice de pente négative:

$$\frac{x+2y-9}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2x-y+2}{\sqrt{5}} \quad | \cdot \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \text{"+" : } (b_1): x - 3y + 11 = 0 \\ \text{pente positive} \\ \text{"-" : } (b_2): 3x + y - 7 = 0 \\ \text{pente } m = -3 \end{cases}$$

② Soit  $C$  le centre du cercle cherché.

$$C(\alpha, \beta), \text{ comme } C \in b_2, \text{ on a } 3\alpha + \beta - 7 = 0 \Rightarrow \beta = -3\alpha + 7$$

On a le centre  $C(\alpha; -3\alpha + 7)$

③ Déterminons  $\alpha$ . On a la condition  $\|\vec{OC}\| = d(C, a)$  (le rayon du cercle)

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3\alpha + 7 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{OC}\| = \sqrt{\alpha^2 + (-3\alpha + 7)^2}$$

$$d(C, a) = \frac{|\alpha + 2(-3\alpha + 7) - 9|}{\sqrt{5}} = \frac{|-5\alpha + 5|}{\sqrt{5}}$$

④ On résout l'équation pour déterminer  $\alpha$ :

$$\sqrt{\alpha^2 + (-3\alpha + 7)^2} = \frac{|-5\alpha + 5|}{\sqrt{5}} \quad | ( )^2$$

$$\alpha^2 + (-3\alpha + 7)^2 = \frac{(-5\alpha + 5)^2}{5} \quad | \cdot 5$$

$$5(\alpha^2 + 9\alpha^2 - 42\alpha + 49) = 25\alpha^2 - 50\alpha + 25$$

$$25\alpha^2 - 160\alpha + 220 = 0 \quad | \div 5$$

$$5\alpha^2 - 32\alpha + 44 = 0$$

$$(\alpha - 2)(5\alpha - 22) = 0$$

$$\text{Donc } \alpha = 2, \beta = 1$$

$$\alpha = \frac{22}{5}, \beta = \frac{-66}{5} + 7 = \frac{-31}{5}$$

$$C_1(2, 1)$$

$$C_2\left(\frac{22}{5}, \frac{-31}{5}\right)$$

$$r_1 = \frac{|-10 + 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$r_2 = \frac{|-22 + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{17}{\sqrt{5}}$$

$$(\gamma_1): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$(\gamma_2): \left(x - \frac{22}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{31}{5}\right)^2 = \frac{289}{5}$$

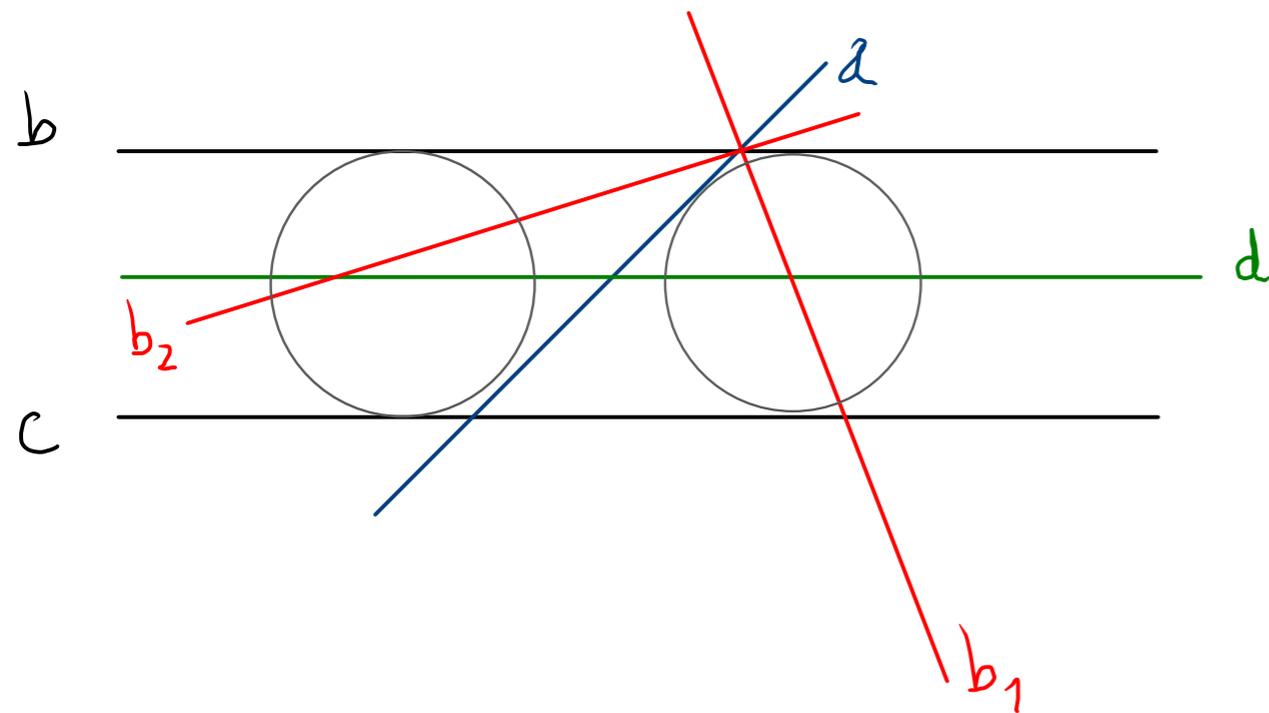
3.3.14 Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites  $3y = 4x - 10$ ,  $3x = 4y + 5$  et  $3x - 4y = 15$ .

$$(a) : 4x - 3y - 10 = 0$$

$$(b) : 3x - 4y - 5 = 0$$

$$(c) : 3x - 4y - 15 = 0$$

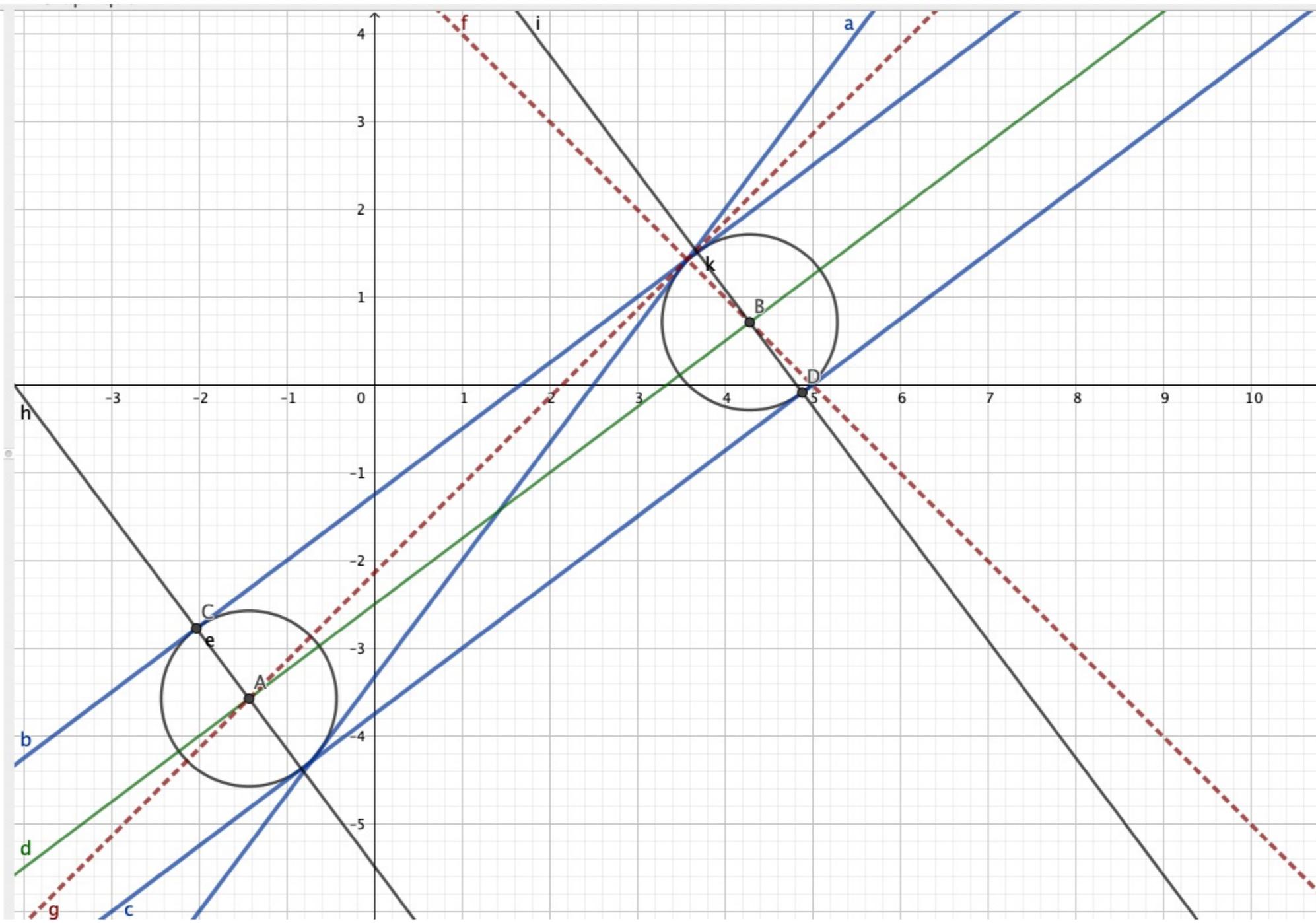
On voit que  $b \parallel c$



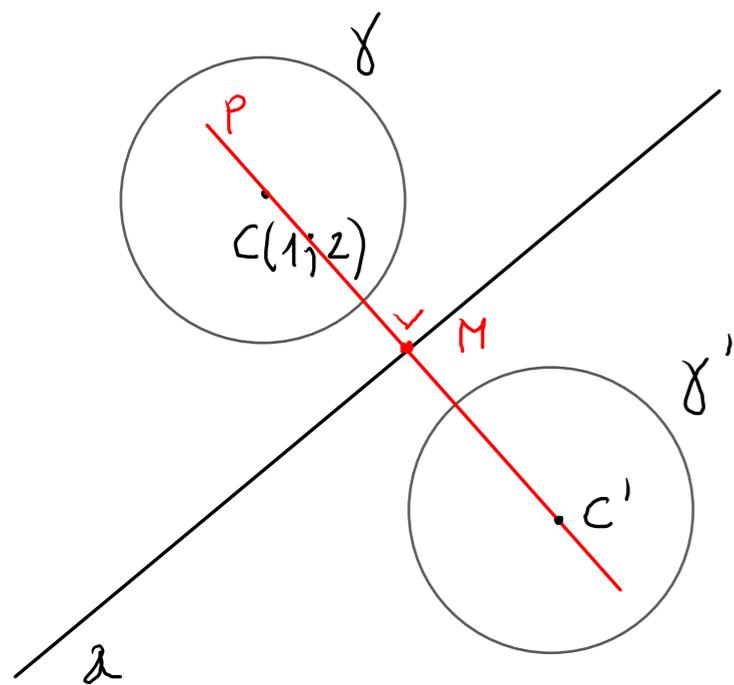
$d$ : équidistante de  $b$  et  $c$

$b_1, b_2$ : bissectrices

- a:  $-4x + 3y = -10$
- b:  $3x - 4y = 5$
- c:  $3x - 4y = 15$
- d:  $3x - 4y = 10$
- g:  $0.71x - 0.71y = 1.52$
- f:  $-0.71x - 0.71y = -3.54$
- A =  $(-1.43, -3.57)$
- B =  $(4.29, 0.71)$
- h:  $2.83x + 2.12y = -11.62$
- i:  $19.8x + 14.85y = 95.46$
- C =  $(-2.03, -2.77)$
- D =  $(4.89, -0.09)$
- e:  $(x + 1.43)^2 + (y + 3.57)^2 = 1$
- k:  $(x - 4.29)^2 + (y - 0.71)^2 = 1$



3.3.15 Déterminer l'équation du symétrique du cercle  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  relativement à la droite  $x = y + 3$ .



$$(\gamma): x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -4 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$(a): x - y - 3 = 0$$

$p$  perpendiculaire à  $a$  par  $C$

$$(p): x + y + e = 0 \quad C \in p$$

$$(p): x + y - 3 = 0$$

$$a \cap p: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \Pi(3, 0)$$

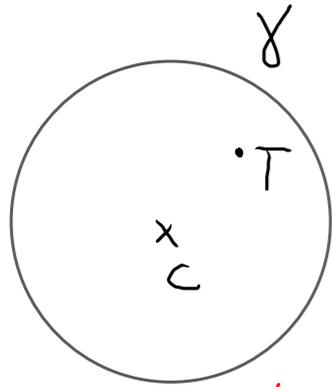
Comme  $M$  est le milieu de  $CC'$ , on a  $C'(5, -2)$

$$\text{Ainsi } (\gamma'): (x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$$

# Tangente à un cercle

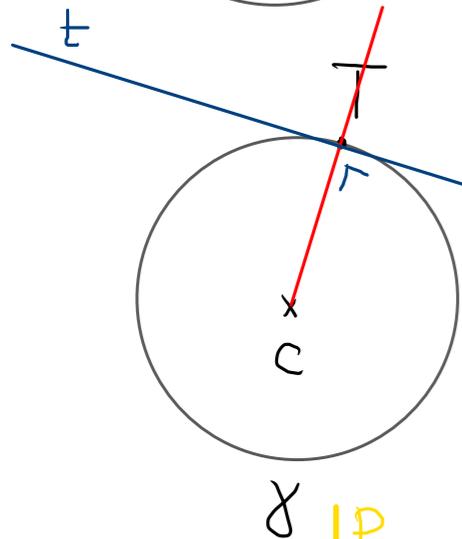
$\gamma(C, R)$  cercle de centre  $C$   
et de rayon  $R$

①



Pas de tangente

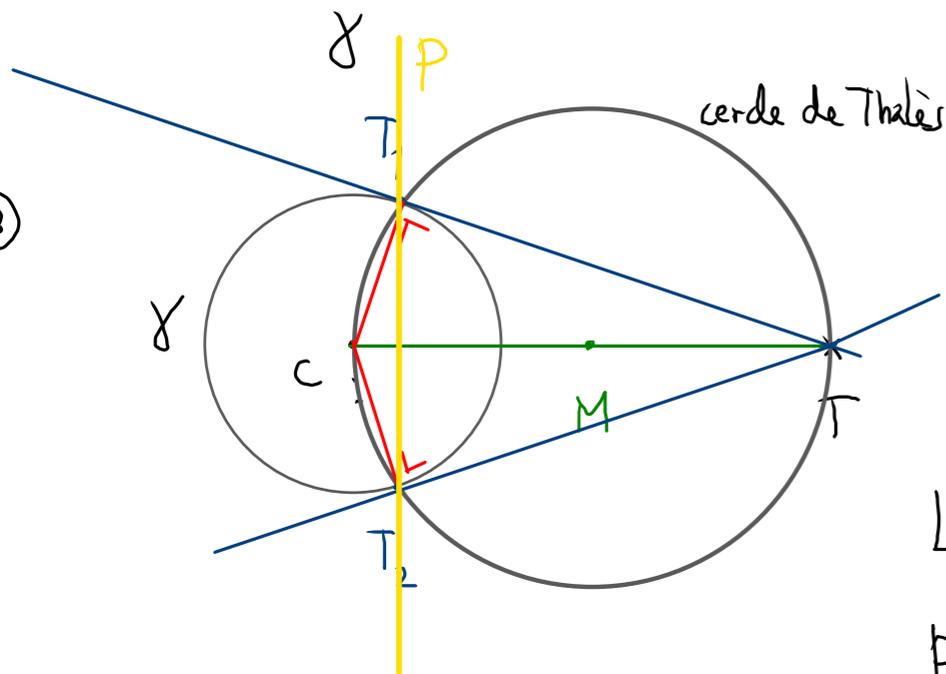
②



$T \in \gamma$

La tangente est donnée par la perpendiculaire  
au rayon de contact.

③



cercle de Thalès

Les points de contact des tangentes issues  
de  $T$  à  $\gamma$  se situent à l'intersection  
du cercle de Thalès de  $CT$  avec  $\gamma$

La droite  $T_1T_2$  s'appelle la polaire  $p$  du  
point  $T$  par rapport à  $\gamma$ .