2.3.1

04.10.19

j) $f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ l) $f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n) $f_{14} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$

k) $f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x^2 \end{array}$ m) $f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ o) $f_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log(x) \end{array}$

j) $f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

<u>inj</u> $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$

<u>surj</u> $y \in \mathbb{R}$ $f(\sqrt[3]{y}) = y$

$\Big\}$ bij

Soit f une fonction réelle bijective

$$\boxed{\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}}$$

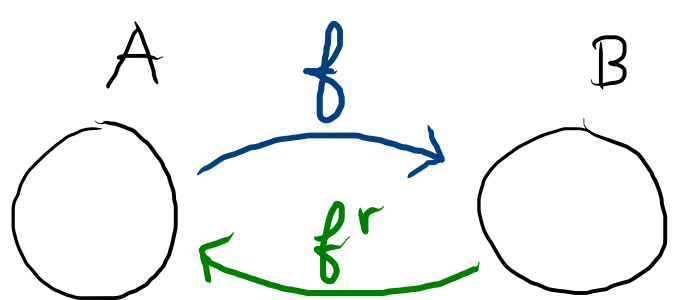
On lui associe sa réciproque

$$\boxed{\begin{aligned} f^r : B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto f^r(y) \end{aligned}}$$

telle que :

$$f^r \circ f(x) = x \qquad \forall x \in A$$

$$f \circ f^r(y) = y \qquad \forall y \in B$$



2.3.2 Définir l'application réciproque des bijections.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$

d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$

e) f_5

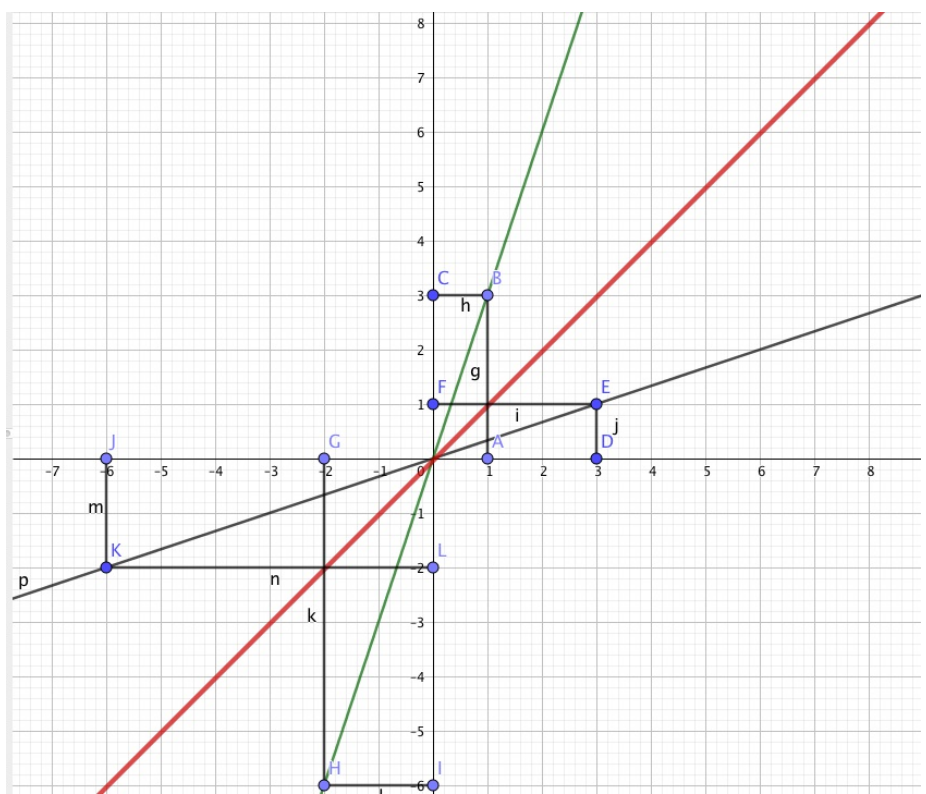
f) f_6

g) f_7

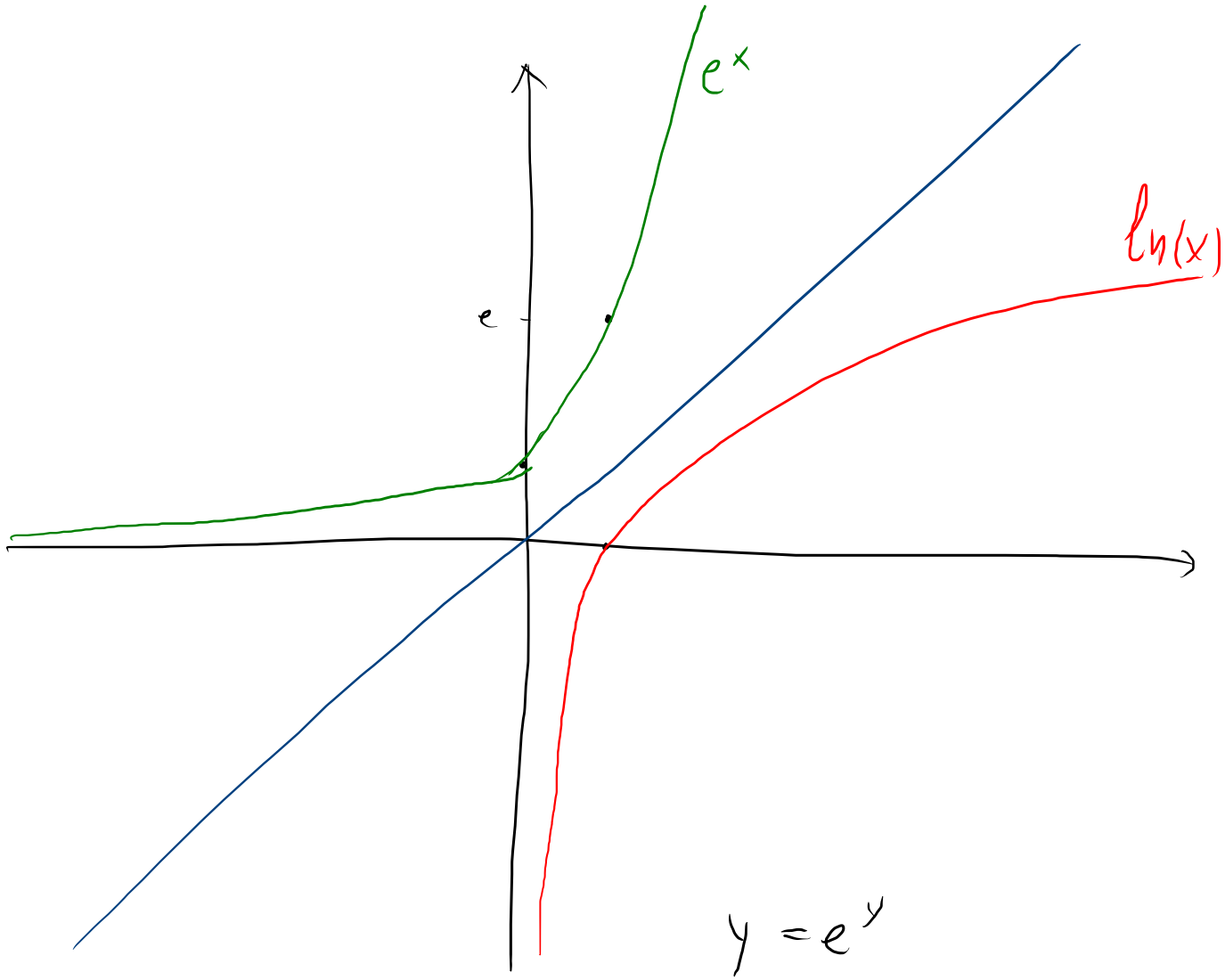
h) f_8

a) $f_1^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

b) $f_2^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{3} \end{array}$

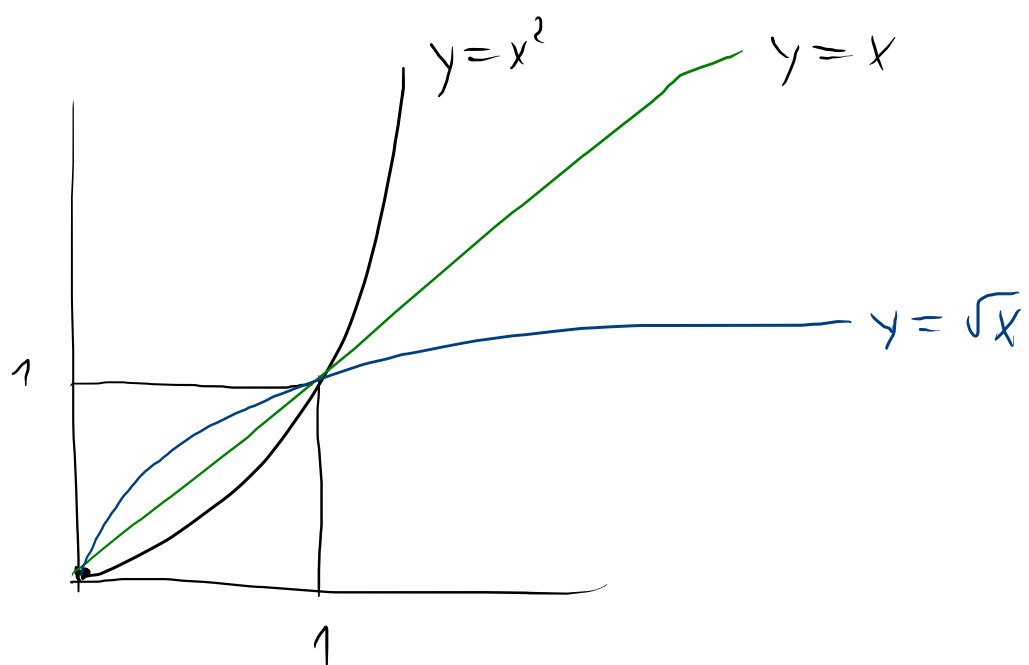


Le graphique d'une fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à $y = x$



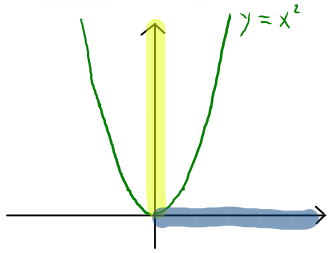
$y = e^y$

2.7182



2.3.3 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que les fonctions suivantes soient des bijections. Puis donner leur réciproque.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^2 + x - 6$



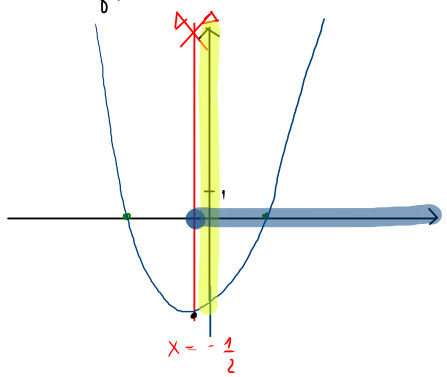
a) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto x^2$

$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$



$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6$

$= -\frac{25}{4} = -6{,}25$

$f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right[$

Cherchons sa réciproque :

$x^2 + x - 6 = y$

$x^2 + x + \frac{1}{4} = y + 6 + \frac{1}{4}$

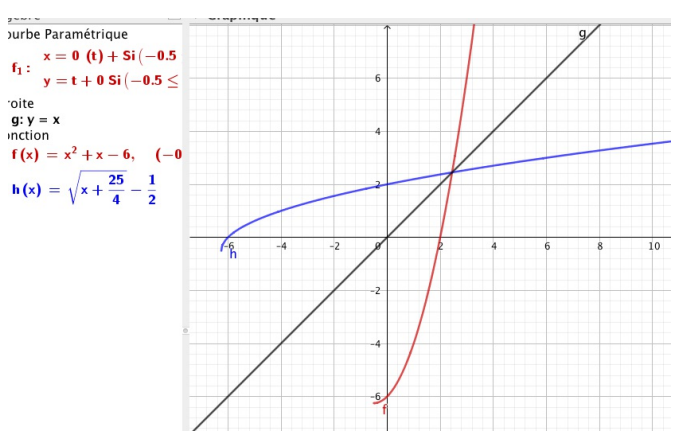
$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{25}{4}$ $\qquad y \geq -\frac{25}{4}$

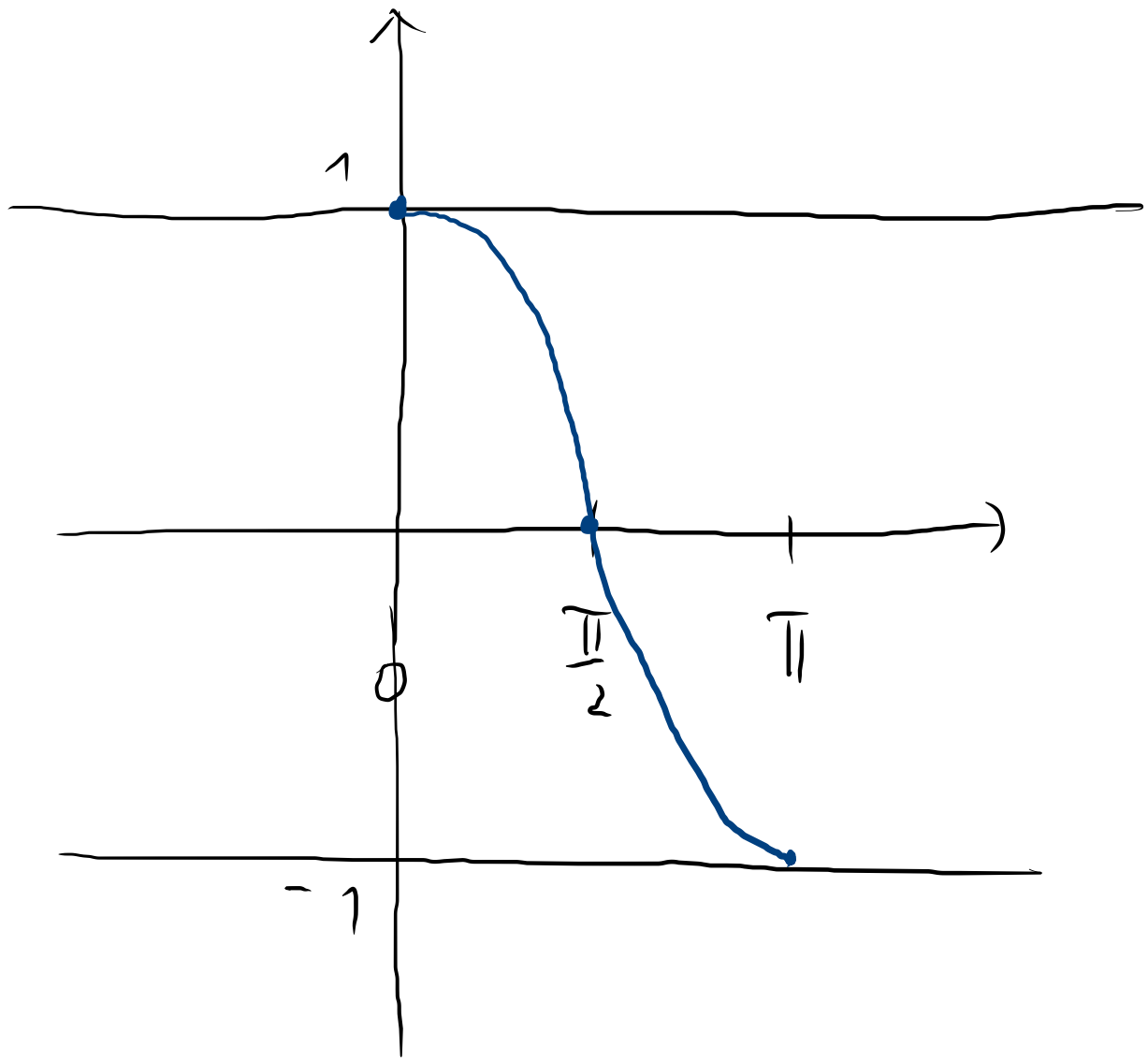
$x + \frac{1}{2} = \sqrt{y + \frac{25}{4}}$

$x = \sqrt{y + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}$

$f^{-1} : \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$y \longmapsto \sqrt{y + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2}$





$$f : [0; \pi[\longrightarrow [-1; 1]$$
$$x \longmapsto \cos(x)$$

$$f^{r} : [-1; 1] \longrightarrow [0, \pi[$$
$$x \longmapsto \arccos(x)$$