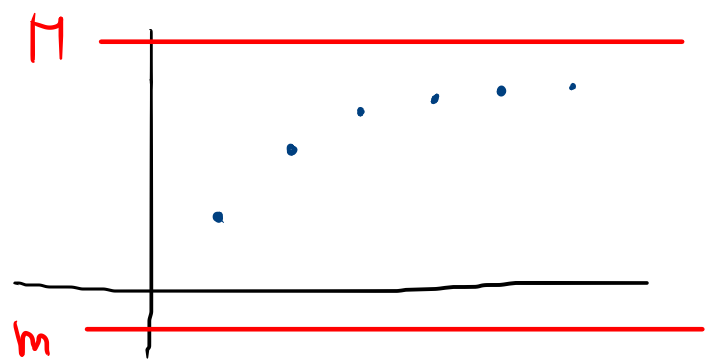
04.12.19

Propriétés

1) Toute suite convergente est bornée.

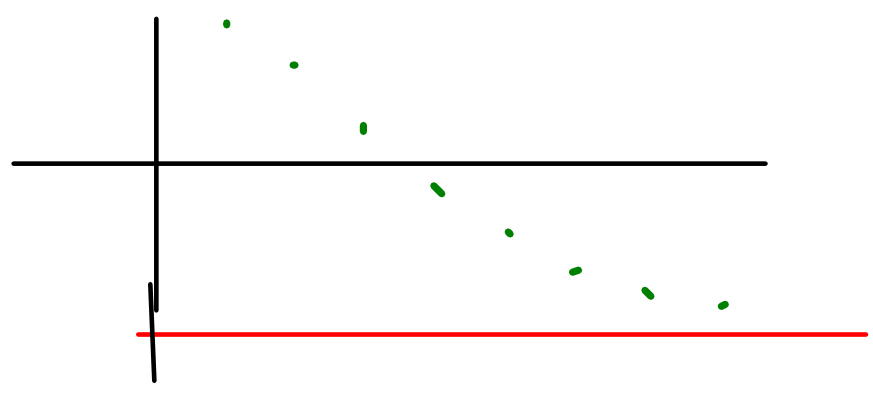


$\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq U_n \leq M$

La réciproque est fausse.

2) Toute suite croissante et majorée converge.

3) Toute suite décroissante et minorée converge.



2.4.8 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 2.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

a) $U_1 = \sqrt{2}$, $U_2 = \sqrt{2U_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $U_3 = \sqrt{2U_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ...

(U_n) est croissante : il faut démontrer que

$$U_{n+1} - U_n \geq 0$$

Démontrons ce résultat par récurrence.

(P_n) (U_n) est croissante, ie $U_{n+1} - U_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$

- La relation est vraie pour $n = 1$:

$$U_2 - U_1 = \sqrt{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}\,(\underbrace{\sqrt{\sqrt{2}} - 1}_{>0}) > 0$$

- $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n} - \sqrt{2U_{n-1}} = \sqrt{2}\,(\overbrace{\sqrt{U_n} - \sqrt{U_{n-1}}}^{\geq 0})$$

$x > y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y} > 0$

$\underset{U_n > U_{n-1}}{\geq 0} \Rightarrow \sqrt{U_n} > \sqrt{U_{n-1}}$

Démontrons que (U_n) est bornée : $\forall n \geq 1$ $U_n \leq 2$

Par récurrence : (P_0) : $U_1 = \sqrt{2} \leq 2$

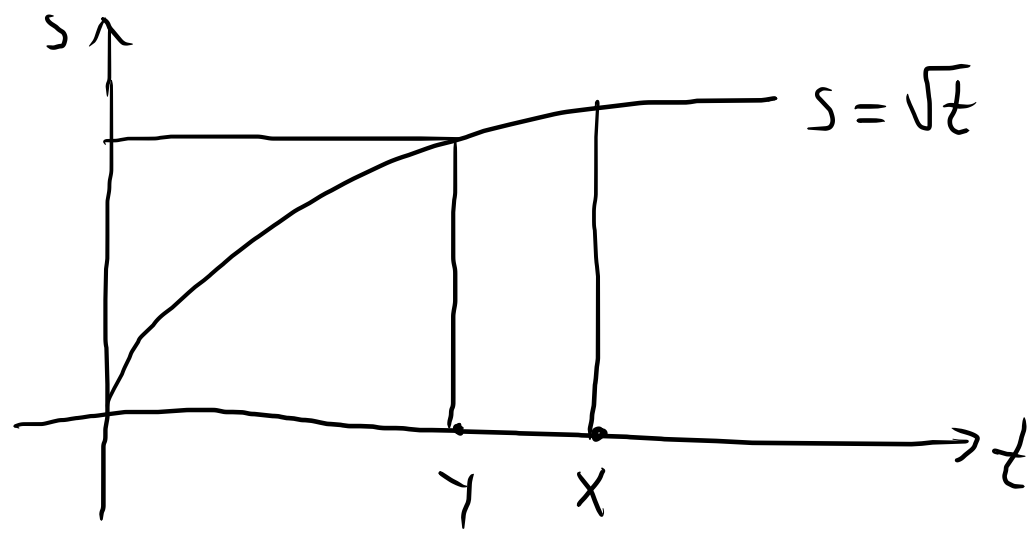
$(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$: $U_n \leq 2 \Rightarrow U_{n+1} \leq 2$

$$U_{n+1} = \sqrt{2U_n} = \sqrt{2}\sqrt{\underbrace{U_n}_{\leq 2}} \leq \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

Donc la suite (U_n) est bornée et croissante donc (U_n) est convergente.

$x > y \qquad x, y > 0$

$\sqrt{x} > \sqrt{y}$



$u_n \longrightarrow \ell \qquad u_n \geq 0$

$\sqrt{u_n} \longrightarrow \sqrt{\ell}$

Comme (U_n) converge, calculons sa limite

$$U_n = \sqrt{2U_{n-1}}$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} U_n}_{} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2U_{n-1}}$$

$$\ell = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2U_{n-1}}$$

$$\ell = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\sqrt{\lim_{n\to\infty} U_{n-1}}}_{\sqrt{\ell}}$$

$$\ell = \sqrt{2}$$

Donc $\ell = \sqrt{2}\sqrt{\ell} \quad \Big| \; (\;)^2 \quad \ell > 0$

$$\ell^2 = 2\ell$$

$$\ell^2 - 2\ell = 0$$

$$\ell(\ell - 2) = 0$$

$\ell = 0$ impossible $\qquad \ell = 2$

Donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} U_n = 2}$

2.4.9 Une suite récurrente est définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1} \end{cases}$, si $n \geq 1$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par 0.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

a) $U_n - U_{n+1} > 0 \qquad n \geq 1$

- $$U_n - \frac{U_n}{U_n+1} = \frac{U_n(U_n+1) - U_n}{U_n+1} = \frac{U_n^2 + U_n - U_n}{U_n+1}$$

$$= \frac{U_n^2}{U_n+1} > 0$$

- Comme $U_n > 0$, si $U_n > 0$ alors $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n+1} > 0$

Donc (U_n) est convergente. Calculons sa limite ℓ

$$\ell = \frac{\ell}{\ell+1} \iff \ell(\ell+1) = \ell$$

$$\ell^2 + \cancel{\ell} = \cancel{\ell}$$

$$\ell = 0$$

$$\boxed{U_n = \frac{2}{2n-1} \quad \text{à démontrer}}$$

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1} \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

2.4.11 Calculer :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3}{4n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \dfrac{1}{1-n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-3^{n-1}}{2+3^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2+\dfrac{2n+n^2-n^3}{n-1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+...+n}{n^2}$